

Leia com atenção as dez perguntas e justifique as respostas de forma sucinta e clara.

1. Quantas permutações de $AABBCCDDEE$ existem de modo a que cada uma das condições seja satisfeita:
 - (a) Os dois A 's aparecem um ao lado do outro
 - (b) Os dois A 's estão separados
 - (c) As quatro vogais (A, A, E, E) estão todas separadas
2. Qual é o coeficiente de x^{18} na expansão de $(x^2 + 2)^{15}$?
3. Prove que qualquer subconjunto, de seis elementos, do conjunto $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ tem de ter dois elementos cuja soma seja igual a 10.
4. Determine o número de inteiros positivos n , $1 \leq n \leq 2000$, que verificam cada uma das propriedades:
 - (a) n não é divisível nem por 2, nem por 5.
 - (b) n não é divisível nem por 2, nem por 5 mas é divisível por 7.
5. Considere a seguinte matriz de incidência de um grafo G :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) O grafo G é hamiltoniano?
 - (b) É euleriano?
 - (c) É planar?
 - (d) Qual é o seu número cromático?
6. Diga, mais uma vez justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações:
 - (a) Dois grafos com o mesmo número de vértices e de arestas são, necessariamente, isomorfos.
 - (b) O grafo obtido de K_n por eliminação de duas das suas arestas tem sempre número cromático igual a $n - 1$.
 - (c) Um grafo \mathcal{G} que contenha apenas uma árvore geradora é ele próprio uma árvore.
 - (d) Para todo o t natural, existe um grafo cúbico (não necessariamente conexo) com $n = 6t$ vértices e em que cada vértice pertence a um único triângulo.
 7. (a) Prove, algebricamente, que:

$$\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$$