

Leia com atenção as 7 perguntas e justifique as respostas de forma sucinta e clara.

- ✓ 1. Uma caixa tem 30 objectos de 5 tamanhos distintos e 6 cores diferentes. Sabendo que para cada tamanho há as 6 cores possíveis, quantas colecções distintas de 4 objectos existem:
- (a) ao todo?
 - (b) se houver exactamente (em cada um dos conjuntos de 4) dois pares de objectos do mesmo tamanho (sem que os quatro sejam do mesmo tamanho)?
- ✓ 2. (a) Qual é o coeficiente de $a^7 b^4 c d^2$ na expansão de $(a + b + c + d)^{14}$?
- (b) Interprete a sua resposta em (a) utilizando um modelo combinatório.
- ✓ 3. Num grupo de 10 pessoas, cada uma é amiga de exactamente 7 pessoas (a amizade é mútua!). Prove que, para qualquer distribuição das pessoas por 3 equipas, há pelo menos uma equipa que contém um par de amigos.
- 1, 4. Determine o número de soluções inteiras não negativas da equação:

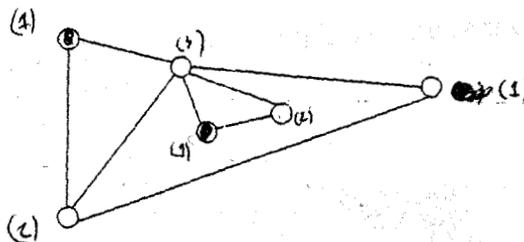
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

com $x_i \leq 7, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(Sugestão: utilize o Princípio de Inclusão-Exclusão.)

$$N(\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4)$$

- ✓ 5. Considere a seguinte representação do grafo G :



- (a) O grafo é Hamiltoniano?
- (b) Qual é o número cromático de G ?

$2+2+4+0$
 $7+2+3+1$
 $4+2+1+2+2$
 $2+2+4$

(c) A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pode ser a matriz de adjacência de um grafo isomorfo a G ?

6. Diga, mais uma vez justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

✓ 2. ✓ (a) Qualquer grafo com 18 vértices, 16 arestas e duas componentes conexas é uma floresta.

✗ ✓ (b) Quando a matriz de incidência de um grafo não tem linhas nulas, o grafo é conexo.

✓ 2. ✓ (c) Uma árvore pode ser um grafo regular.

✓ ✓ (d) Se $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ for a sequência de graus de uma árvore com n vértices então

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2.$$

✓ 2. ✓ (e) Se a for um vértice de um grafo conexo e bipartido então $d(a, b) \neq d(a, c)$ para toda a aresta bc .

(Nota: $d(v, w)$ é a distância entre os vértices v e w)

7. Um vértice diz-se *central* se o valor da maior distância entre ele e outro qualquer for tão pequeno quanto possível. Esse valor chama-se *raio* do grafo e denota-se por r . Formalmente, $r(G) = \min_{x \in V(G)} \max_{y \in V(G)} d_G(x, y)$

(a) Diga qual é o raio de C_{2k} , C_{2k+1} , B_{2k} e P_{2k+1} (onde C_n e P_n são, respectivamente, o ciclo e o caminho com n arestas).

(b) Mostre que um grafo G com raio não superior a k e grau máximo não superior a d tem não mais do que $1 + kd^k$ vértices.

(c) É possível melhorar o majorante da alínea anterior? Como?

