

Exatona

# CORRECCÃO DO EXAME

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

→ Exame de Matemática Discreta ←  
Licenciatura em Matemática

DURAÇÃO: 2 HORAS E 30 MINUTOS

DATA: 28 de Julho de 2004. ← Junho

↑  
n

1. Considere um conjunto  $A$  com 50 elementos e um conjunto  $B$  com 100 elementos.
  - ✓ a. Quantas aplicações distintas  $f: A \rightarrow B$  podem ser definidas?
  - ✓ b. Quantas dessas aplicações são injectivas?
2. Suponha que de um total de 100 pessoas, existem 60 pessoas com miopia e 80 pessoas com astigmatismo.
  - ✓ a. No mínimo, quantos têm astigmatismo miópico (simultaneamente astigmatismo e miopia)?
  - ✓ b. No máximo, quantos têm apenas miopia?
- ✗ 3. Descreva o grupo de rotações planas de um quadrado com os vértices numerados de 1 a 4, exibindo os seus 4 elementos como permutações dos vértices. Indique qual o elemento neutro do grupo e, para cada permutação, a correspondente inversa.

✗ 4. Mostre que, em qualquer grafo com  $n \geq 2$  vértices, há sempre 2 vértices com o mesmo grau.

5. Considere o grafo  $G$  cuja matriz de adjacência é dada por

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad 5 \times 5$$

- ✓ a. Indique o grau de cada vértice, sem recorrer ao esboço do grafo.
- ✓ b. Diga, justificando, se o grafo  $G$  é Euleriano.
- ✓ c. Diga, justificando, se o grafo  $G$  é Hamiltoniano.
- ✗ d. Calcule as matrizes de alcançabilidade e do fecho transitivo de  $G$ .
- ✓ e. Faça um esboço do grafo  $G$ .  $U = \{U, U^2, U^3, \dots, U^{n-1}\}$
- ✓ f. Dê uma orientação a cada aresta tal que o digrafo obtido seja fortemente conexo.
- ✓ g. Dê uma nova orientação a cada aresta tal que o digrafo obtido seja unilateralmente conexo mas não fortemente conexo.

VOLTE

6. À sua escolha, responda a APENAS UMA das questões (A) ou (B) seguintes:

(A) Suponha que  $n$  pombos estão distribuídos por  $p$  gaiolas sem que nenhuma esteja vazia. Mostre que é necessário retirar  $n - p + 1$  pombos para garantir que pelo menos uma gaiola fica vazia.

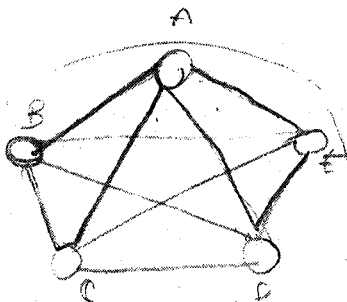
× (B) De quantas maneiras distintas podemos distribuir 8 objectos iguais por 3 caixas distintas de modo que a primeira caixa contenha 2 ou 3 objectos, a segunda caixa 1, 2 ou 3 objectos e a terceira um máximo de 4 objectos.

7. Considere o grafo completo com 5 vértices. Faça um diagrama dando nome às arestas e escolha uma árvore abrangente.

✓ a. Qual é a dimensão do espaço dos ciclos?  $E - V + 1 = 10 - 5 + 1 = 6$  dimensão

✓ b. Quais são os ciclos básicos associados à árvore que escolheu?

✓ c. Escolha um ciclo distinto dos básicos e exprima-o como combinação linear dos ciclos básicos. ×



$$E - V + 1 =$$

$$10 - 5 + 1 = 6 \text{ dimensão}$$

