

MATEMÁTICA DISCRETA

Exame final: 2004-07-16

Duração da prova: Duas horas

1. Num Campeonato da Europa de Futebol participam 16 equipas diferentes, uma das quais é Portugal.
 - a) Na final jogam 2 das equipas inicialmente presentes. Quantas finais são possíveis?
 - b) Em quantas das possíveis finais estará Portugal presente?
 - c) De quantas formas distintas é possível atribuir o primeiro e o segundo lugares do campeonato?
 - d) Num plantel de 22 jogadores há 14 que jogam muito bem ao ataque e 12 que jogam muito bem à defesa (incluindo obviamente os guarda-redes). Responda agora:
 - i: quantos jogadores no mínimo jogam muito bem tanto ao ataque como à defesa?
 - ii: se houver 8 jogadores que jogam muito bem tanto ao ataque como à defesa, quantos haverá que não jogam assim tão bem nem ao ataque nem à defesa?

2. Considere a equação $x + y + z = 50$.
 - a) Quantas soluções (x,y,z) distintas, com x, y e z inteiros não negativos, admite esta equação?
 - b) Quantas dessas soluções não têm elementos nulos?

3. Mostre que, em qualquer grafo, a soma dos graus dos vértices é sempre um número par.

4. Pretendemos fazer uma bandeira com 10 faixas verticais utilizando 3 cores: o verde, o vermelho, o branco. Quantas bandeiras distintas podemos fazer:
 - a) ao todo?
 - b) se duas faixas adjacentes não puderem ter a mesma cor?
 - c) se tiverem de ter no mínimo duas e no máximo três faixas verdes, não mais de duas vermelhas e pelo menos uma branca?

5. Considere um pseudo-digrafo D com cinco vértices 1, 2, 3, 4 e 5 e cujos arcos são: $(1,2)$; $(1,5)$; $(2,3)$; $(3,1)$; $(3,2)$; $(4,1)$; $(4,2)$; $(4,3)$; $(5,5)$.
 - a) Escreva as matrizes de adjacência (numérica), de alcançabilidade e de fecho transitivo de D .
 - b) Diga se a matriz de adjacência é nilpotente ou não.
 - c) Diga que tipo de conexão tem este digrafo.

6. Considere um grafo G com seis vértices 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e cujas arestas são: $\{1,2\}$; $\{1,4\}$; $\{1,5\}$; $\{2,3\}$; $\{2,6\}$; $\{3,4\}$; $\{4,6\}$; $\{5,6\}$.
 - a) Diga qual o grau máximo e mínimo de G
 - b) Diga se G é bipartido
 - c) Diga se G tem trilha fechado de Euler
 - d) Diga se G tem circuito de Hamilton
 - e) Qual o número cromático de G ?
 - f) Qual o número ciclomático de G ?
 - g) Verifique que G é conexo fazendo um diagrama e diga o número mínimo de vértices que teria de remover (e quais) para tornar G desconexo.

VOLTE

7. Considere a função real de variáveis reais

$$f(u, v, x, y, z) = 3(v + x)(\sin 2u + \sin 2y + \sin 2z).$$

- a) Diga quantas simetrias tem esta função.
- b) Diga quais são essas simetrias.

8. Um hotel quer planejar a ocupação dos seus quartos de modo a usar o menor número de quartos possível e, obviamente, a não forçar os clientes a mudar de quarto. Relativamente a um determinado período, uma semana por exemplo, sabe-se com antecedência as noites que cada cliente quer passar no hotel.

- a) Como pode usar a Teoria dos Grafos para fazer a distribuição dos quartos?
- b) Exemplifique para o caso concreto em que as marcações dos clientes A, B, C, D, E, F são dadas a seguir:

A: 2ª, 3ª, 4ª, 5ª;

B: 6ª, sábado, domingo;

C: 4ª, 5ª, 6ª;

D: 4ª;

E: sábado, domingo;

F: 3ª, 4ª.