MATEMÁTICA DISCRETA

Justifique as suas respostas

2006-07-20 (2." época de exame)

1. a) Quantas permutações se podem fazer usando 4 A's, 3 B's e 2 C's ?;
b) E quantas permutações se podem fazer usando 4 A's, 3 B's e 2 C's se não permitirmos que as letras iguais formem bloco?

2. a) De quantas maneiras podemos pintar 20 quartos iguais num hotel usando 5 cores?
b) E de quantas maneiras podemos pintar 20 quartos iguais num hotel usando também 5 cores, mas agora sabendo que só há tinta branca, tinta azul e tinta verde para 3 quartos de cada uma destas cores (embora amarela e vermelha tenhamos quantidade suficiente para quantos quartos quisermos)?

3. São dados kp inteiros positivos cuja soma é A. Mostre que há k desses números cuja soma é S ***r A/p*** **;**

4. Prove que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n\,(n+1)\,2^{n-2}$$

5. Mostre, com um diagrama claramente desenhado, que o octaedro, encarado como grafo, é o grafo **tripartido** completo (ou **tripartido** completo cheio) $K_{2,2,2}$.

6. a) Seja C_5 um ciclo orientado. **Quantos** arcos tem o complementar de C_5?
b) E se C_5 for um ciclo não orientado, quantos arcos tem o seu complementar?

7. a) Qual é o número cromático do **tetraedro,** ou seja, do grafo K_4?
b) Se chamarmos número cromático **arestal** ao número **mínimo** de cores **necessárias** para colorir as arestas de um grafo de modo que arestas com um vériice comum tenham cores distintas, qual é o número cromático **arestal** de K_4?

MATEMÁTICA DISCRETA
RESPOSTAS DO EXAME DE 2ª ÉPOCA do dia 2006-07-20

1a). Há ao todo $\frac{9!}{4!\,3!\,2!}$ permutações.

b) Deste universo com $\frac{9!}{4!\,3!\,2!}$, há $\frac{6!}{3!\,2!}$ que contêm um bloco de **4** A's, há $\frac{7!}{4!\,2!}$ que contêm um bloco de 3 B's, há $\frac{8!}{4!\,3!}$ que contêm um bloco de 2 C's, há $\frac{4!}{2!}$ com um bloco de **4** A's e um de 3 **B's,** há $\frac{5!}{3!}$ com um de **4** A's e um de 2 C's, há $\frac{6!}{4!}$ com um de 3 B's e um de 2 Cs e há 3! com os 3 blocos. Daqui resulta o número procurado N' pelo princípio da inclusão e exclusão. Será:

$$N' = \frac{9!}{4!\,3!\,2!} - \frac{6!}{3!\,2!} - \frac{7!}{4!\,2!} - \frac{8!}{4!\,3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{5!}{3!} + \frac{6!}{4!} - 3!$$

2a) Temos 5 objectos (cores) para ocupar 20 posições sem que a ordem importe (quartos iguais) podendo (e tendo que) repetir objectos. Logo há $\binom{5+20-1}{20}=\binom{24}{20}$. São combinações podendo repetir.

b). Usa-se a função geradora $(1+x+x^2+x^3)^3\,(1+x+x^2+...)^2$ que se pode reescrever $(1-x^4)^3\,(1-x)^{-5}$, usando a "fórmula dos grãos de trigo", e daqui resulta ainda $(1-3x^4+3x^8-x^{12})\sum_{n=0}^{\infty}\binom{4+n}{n}x^n$. O coeficiente de x^{20} nesta expressão será $\binom{24}{20}$ $-3\binom{20}{16}+3\binom{16}{12}-\binom{12}{8}$.

3. Se na soma dos kp números os associar em p subsomas de k parcelas cada uma, pelo menos uma dessas subsomas tem de ter soma $S \geq A/p$ **.**

4. Recorde que é válida a igualdade $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{n-k}$ e agora parta da igualdade **k.k.** $\binom{n}{k} = k.n.\binom{n-1}{k-1}$. Depois calcule

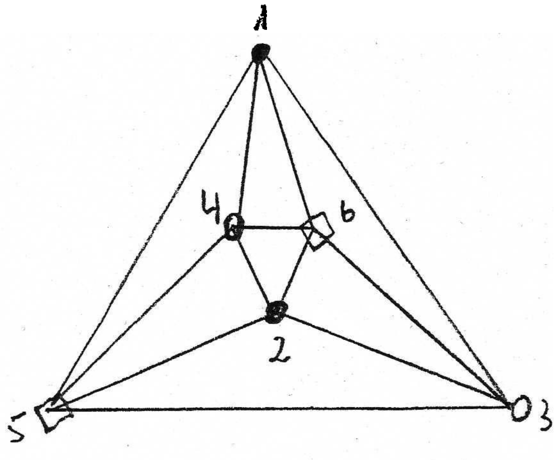
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\left[(k-1)\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}\right] =$$

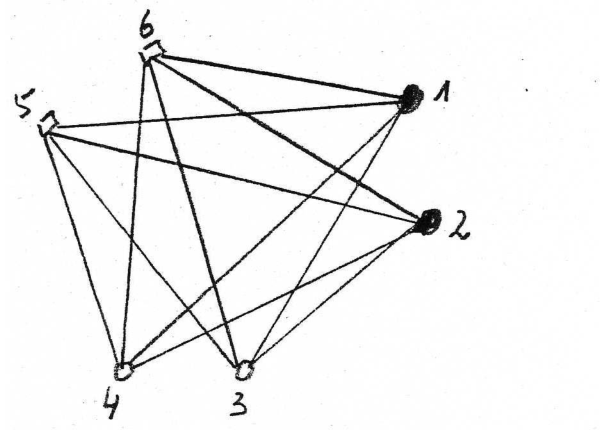
$$= (n-1).2^{n-2} + 2^{n-1} = (n+1).2^{n-2}$$

Aqui usou a bem conhecida **fórmula** $n\,.\,2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k.$

NOTA: Um dos alunos demonstrou brilhantemente esta fórmula usando um modelo muito interessante: consiste em escolher, entre n pessoas, uma comissão de **k** a qual comissão deverá ter um presidente e um tesoureiro podendo os dois cargos serem exercidos pela mesma pessoa.

5. No diagrama, exiba os 3 pares de vértices não adjacentes entre si, mas em que cada um deles está ligado aos outros quatro.





6a). Não orientado é **10** − 5 = 5, pois as arestas que o complementar tem são as que faltam ao ciclo de comprimento 5 para perfazer o total das **10** arestas do grafo completo K_5.
b) No caso orientado é 5 x **4** − 5 = **15,** porque a totalidade dos arcos possiveis é 20 ou seja, de cada vértice, podem partir 4 arcos e portanto temos ao todo 5 ×**4** = 20. Em nenhum destes casos se aceitam lacetes pelas definições que adoptámos para grafo e digrafo.

7a). O número cromático do tetraedro **é** 4 pois cada vértice está ligado aos outros 3.
b) Mas o cromático aresta1 é 3 pois podemos emparelhar as 6 arestas em 3 pares **(a,a′), (b,b′),(c,c′)** que não têm, em cada par, vértices comuns