Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Análise Numérica I

Licenciaturas em Matemática e Engenharia Geográfica

3 de Fevereiro de 2000 Duração: 2h 30m

1. Considere um sistema de duas equações $Ax = b$ na forma geral:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

(a) Mostre que os métodos iterativos de Jacobi e de Gauss-Seidel convergem para qualquer aproximação inicial $x^{(0)}$, se e só se $|m| < 1$, onde $m = \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.

(b) Considerando $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, verifique se o método de Jacobi converge.

(c) Sabendo que ao aplicar o método de Jacobi a um sistema $Ax = b$, onde A é uma matriz estritamente diagonal dominante, se verifica

$$||x^{(k+1)} - x||_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_\infty ,$$

onde x é a solução do sistema e $\alpha = \max\left\{\dfrac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \dfrac{|a_{21}|}{|a_{22}|}\right\}$, utilize este método para obter uma aproximação para a solução do sistema dado com um erro inferior a 0.05.

2. Considere a seguinte equação algébrica: $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.

(a) Utilizando a regra de Descartes, faça a contagem das raízes desta equação.

(b) Mostre que existe uma única raiz daquela equação no intervalo $[1, 2]$.

(c) Pretende-se calcular um valor aproximado da raiz considerada na alínea anterior, utilizando um método iterativo, definido por uma das seguintes funções iteradoras:

$$g_1(x) = \frac{20}{x^2 + 2x + 10}; \qquad g_2(x) = x - \frac{x^3 + 2x^2 + 10x - 20}{3x^2 + 4x + 10}.$$

i. Tomando como aproximação inicial $x_0 = 2$, verifique se estão satisfeitas as condições de convergência para cada um dos métodos.

ii. Sem efectuar iterações, diga qual dos dois métodos converge mais rapidamente, justificando a sua resposta.

3. Considere a seguinte tabela

x_i	0	0.5	1	1.5	2
$f(x_i)$	-0.432	-0.017	-0.352	-2.187	-6.272

referente a uma determinada função f.

(a) i. Determine um valor aproximado de $\int_0^2 f(x)\,dx$, recorrendo à regra de integração numérica que achar mais conveniente. Justifique.

ii. Indique uma estimativa do erro cometido. O que pode concluir? ??

(b) Considerando que $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, indique uma possível expressão de $f(x)$. Justifique a resposta.

v.p.f

4. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y'(t) &= y(t) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$, cuja solução exacta é $y(t) = e^t$.

(a) Mostre que a aproximação obtida pelo método de Euler com passo h pode ser escrita na forma

$$y_n = (1+h)^n\,,\ n = 0, 1, \ldots.$$

(b) Utilizando o método de Euler com $h = 0.1$ e $h = 0.2$ determine duas aproximações para $y(1)$. Indique os erros cometidos nestas aproximações e compare os resultados obtidos.

FORMULÁRIO

Método de Jacobi

$$A = D - L - U$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b\,,\quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Método de Gauss-Seidel ($Ax = b$)

$$A = D - L - U$$

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b\,,\quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Método de Newton-Raphson ($f(x) = 0$)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,,\quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Regra dos Trapézios e respectivo erro

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,,\quad E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)\,,\quad \xi \in [a, b].$$

Regra de Simpson e respectivo erro

$$I_S(f) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,,\quad E_S(f) = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi)\,,\quad \xi \in [a, b].$$

Interpoladora de Newton das diferenças divididas

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Interpoladora de Newton das diferenças Δ

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$