Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Licenciaturas em Matemática e Engenharia Geográfica

4 de Janeiro de 2001 — Duração: 2h 30m

1- Para aproximar a solução (x_1, x_2, x_3) dum sistema linear Ax=b, recorreu-se ao seguinte método iterativo

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.6x_2^{(k)} - 0.6x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = -0.6x_1^{(k)} - 0.6x_3^{(k)} + 1, \\ x_3^{(k+1)} = -0.6x_1^{(k)} - 0.6x_2^{(k)} + 1 \end{cases} \qquad k=0, 1, \ldots.$$

(a) Escreva a matriz de iteração M de tal método.

(b) De entre os métodos estudados, qual o método em causa? Será convergente? Justifique a resposta.

(c) Sabendo que $b = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ obtenha a matriz A do sistema inicial.

?

(d) Dado o sistema linear Ax=b, denotemos por x a sua solução exacta e por y a solução aproximada obtida por qualquer método. Supondo que $x \neq 0$ e com r=b-Ay o erro residual, mostre que $\|y - x\| \leq \|A^{-1}\|.\|r\|$.

2- Sendo dada a seguinte tabela

$f(x) = P_m(x)$?

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-5	0	1	4	15

?

(a) Obtenha uma função f, que possa ser representada por esta tabela, recorrendo à interpolação e aproxime o valor de f(0.5).

(b) Determine um valor aproximado de $I = \int_{-2}^{2} f(x)dx$ usando a regra de integração que achar mais adequada. Justifique a razão pela qual escolheu essa regra de integração.

(c) O valor obtido será um valor aproximado por excesso ou por defeito? Justifique a resposta.

3- Seja f $\in C^1([a,b])$ uma função crescente e tal que f(a) < 0 e f(b) > 0.

? ?

(a) Mostre que o zero desta função no intervalo [a,b] se pode obter pelo método iterativo do ponto fixo com

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{M},$$

em que M é uma constante apropriada. Determine os valores admissíveis para M.

(b) Mostre que a equação $1 - 2x + \cos x = 0$ tem uma raíz real em $[0,1]$. Quantas iterações do método da bissecção são necessárias para a aproximar com uma precisão de $0.5\text{x}10^{-3}$?

v.p.f.

4- Localize, usando a representação gráfica, as raízes do sistema

$$\begin{cases} y+1 = x^2 \\ x^2 = 5-y^2 \end{cases}$$

e aproxime a solução de abcissa positiva pelo método de Newton, com 2 iterações.

5- Sabendo que para a regra de integração do ponto médio se tem

$$\int_{x_0-h/2}^{x_0+h/2} f(x)dx = hf(x_0) + E,$$

para $f \in C^2(x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2})$, mostre que $E = \dfrac{h^3 f''(\xi)}{24}$, com $\xi \in (x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2})$.

FORMULÁRIO

Método de Jacobi (Ax=b)

$$A = D - L - U, \qquad x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Método de Gauss-Seidel (Ax=b)

$$A = D - L - U, \qquad x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Método de Newton para sistemas não lineares (F(x)=0)

$$J(X^{(n-1)})X^{(n)} = J(X^{(n-1)})X^{(n-1)} - F(X^{(n-1)}), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Regra dos Trapézios e respectivo erro

$$I_T(f) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

Regra de Simpson e respectivo erro

$$I_S(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$E_S(f) = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a,b]$$

Interpoladora de Newton das diferenças divididas

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots + f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

Interpoladora de Newton das diferenças Δ

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$