Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Licenciaturas em Matemática e Engenharia Geográfica

31 de Janeiro de 2001 — Duração: 2h30m

1. (a) Considere a seguinte tabela relativa a uma função f

x	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$f(x)$	0.076	0.086	0.094	0.100	0.108

   1. Aproxime $f(x)$ no intervalo $[0.4,\ 1.2]$ usando o polinómio interpolador de grau 4 mais conveniente.
   2. ? Prove que o polinómio obtido na alínea anterior é único.

   (b) Prove que o operador de diferenças progressivas, definido por $\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$, é linear.

2. Considere a equação $f(x) = 0$, com $f(x) = (\ln x)^2 - x - 1$.

   (a) Mostre que a equação $f(x) = 0$ tem uma e uma só raíz x^* no intervalo $]0,1[$.

   (b) Poderá aproximá-la pelo método iterativo de Newton? Em caso afirmativo, determine um valor positivo $b \leq 1$ tal que o método convirja para x^*, tomando $x_0 = b$.

? 3. Mostre que o polinómio $p(x) = x^3 - 3ax^2 + \frac{1}{2}$ possui pelo menos uma raíz real negativa, qualquer que seja o valor do parâmetro a. Para que valores de a é que as outras raízes são reais e estão no intervalo $[0,1]$?

4. O sistema não linear

$$\begin{cases} y = x^3 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{1-x^2}$$

tem duas soluções.

? (a) Aproxime a solução de maior abcissa usando o método de Newton uma vez fazendo $X^{(0)} = [1 \quad 1]^T$ e justifique que esta é uma boa escolha para a aproximação inicial.

? (b) Usando a alínea anterior, indique um valor aproximado para a raíz da equação não linear

$$\sqrt{1-x^2} = x^3.$$

$1 - x^2 = x^{3/2}$

$1 - x^2 = \sqrt{x^3}$

? (c) Considere a região do plano definida por

$1 - x^2 = x\sqrt{x}$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad y \geq x^3, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Determine um valor aproximado da área daquela região, com 1 casa decimal correcta, recorrendo à regra dos trapézios.

$1 - x^2 = x^6$

$1 = x^6 - x^2$

v.p.f.

5. ? (~~a~~) Considere o seguinte método iterativo para a resolução do sistema $Ax = b$,

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c.$$

Mostre que se $\|M\| \leq \sigma < 1$, então são válidas as seguintes relações

$$\|e^{(k)}\| \leq \sigma^k \|e^{(0)}\| \quad \text{e} \quad \|e^{(k)}\| \leq \frac{\sigma}{1-\sigma}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|,$$

onde $e^{(k)} = x - x^{(k)}$.

(b) Considere um sistema de equações lineares $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}.$$

~~i.~~ Mostre que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel são convergentes.

? ii. Qual dos dois métodos converge mais rapidamente? Justifique a sua resposta usando a alínea anterior. $\to$ (a)

FORMULÁRIO

Interpoladora de Newton das diferenças divididas

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

Interpoladora de Newton das diferenças progressivas

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\,h^n}(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Método de Newton para sistemas não lineares ($F(X) = 0$)

$$J\left(X^{(n-1)}\right)X^{(n)} = J\left(X^{(n-1)}\right)X^{(n-1)} - F\left(X^{(n-1)}\right), \ n = 0, 1, \ldots$$

Regra dos Trapézios e respectivo erro

$h = \frac{b-a}{2}$

$$I_T(f) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b - a)f''(\xi), \ \xi \in [a, b]$$

Método de Jacobi ($Ax = b$)

$$A = D - L - U, \ x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Método de Gauss-Seidel ($Ax = b$)

$$A = D - L - U, \ x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$