Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Licenciaturas em Matemática e Engenharia Geográfica

8 de Janeiro de 2002 Duração: 2h 30m

1- Considere o seguinte polinómio $p(x) = 2x^3 - 7.5x^2 + 6x - 1$.

a) Localize e separe os zeros reais de p(x), usando o método de Fourier.

b) Usando o método de Newton, determine um valor aproximado, com duas casas decimais correctas, do maior zero de p.

2- Pretende resolver-se o sistema de equações lineares $\begin{bmatrix} k & k \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $k \neq 0$, usando um método iterativo.

a) Diga para que valores de k convergem cada um dos métodos estudados - o método de Jacobi e o método de Gauss-Seidel.

b) Fazendo k=2, determine uma aproximação para a solução do sistema, usando duas vezes o método iterativo que achar mais conveniente. Justifique a resposta.

? 3- a) Usando a teoria da interpolação, calcule $\sum_{i=0}^{n} x_i l_i(x)$, em que $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, i=0, 1, ..., n. Justifique devidamente a resposta.

? b) Determine o polinómio interpolador de Lagrange para a função $y = \sin(\pi x)$ considerando os pontos $x_0 = 0, x_1 = 1/4, x_2 = 1/2$.

c) Mostre que nas condições referidas em b) o polinómio interpolador para y é único.

4- a) Deduza a regra dos trapézios simples e obtenha o correspondente erro.

b) Determine um valor aproximado de $I = \int_0^1 x^{-1/2} e^x dx$, usando a regra dos trapézios simples. (**Sugestão:** Efectue a mudança de variável $x = t^2$.)

c) Sem efectuar a mudança de variável, indique como poderia obter uma aproximação para I, recorrendo a um método numérico.

v. p. f.

5- Considere a função g definida por g(x)=(n+1)x-1.

a) Prove que $\bar{x} = \frac{1}{n}$ é ponto fixo de g.

b) Fazendo n=3 determine uma aproximação para $\bar{x}$ usando o método do ponto fixo duas vezes.

FORMULÁRIO

Método de Newton (f(x)=0)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{n=0, 1, ...}$$

Método de Jacobi (Ax=b)

$$A = D - L - U, \qquad x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0,1,2,...$$

Método de Gauss-Seidel (Ax=b)

$$A = D - L - U, \qquad x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b, \quad k = 0,1,2,...$$

Polinómio interpolador de Lagrange

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x), \qquad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \text{i=0, 1, ..., n}$$

Regra dos Trapézios e respectivo erro

$$I_T = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \qquad \xi \in (a,b)$$