Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Licenciaturas em Matemática e Engenharia Geográfica

6 de Fevereiro de 2002 Duração: 2h 30m

Importante: Justifique todas as respostas.

1- Considere a equação $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$.

a) Localize e separe as suas raízes reais.

b) Usando o método do ponto fixo, determine um valor aproximado, com duas casas decimais correctas, para a menor raíz positiva.

2- Seja η a raíz exacta da equação f(x)=0 e $\bar{x}$ uma aproximação de η, onde $\eta, \bar{x} \in [\alpha, \beta] \subset IR$

Sabendo que $|f'(x)| \geq m > 0$ para $\forall\, x \in [\alpha, \beta]$, prove que $|\bar{x} - \eta| \leq \dfrac{|f(\bar{x})|}{m}$.

3- Considere o sistema de três equações não lineares

$$\begin{cases} \sin x_1 + x_2^2 + x_3^2 - 2 = 0 \\ 2e^{x_1} - x_2 + x_3^2 - 2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

a) Prove que para obter a 1ª aproximação da solução do sistema, usando o método de Newton, com $x^{(0)} = (0,0,0)$, é necessário resolver o sistema de equações lineares Ax=b, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema de equações lineares anterior e comente o resultado obtido.

4-a) Obtenha um valor aproximado de $I = \int_{-2}^{3} f(x)\,dx$ e dê uma estimativa do erro dessa aproximação usando os valores da tabela

x_i	-2	-1	0	1	2	3
f(x_i)	-5	0	1	4	15	40

b) Determine uma aproximação para $\int_a^b g(x)dx$, supondo conhecido g apenas num ponto $c \in [a,b]$ e deduza o erro correspondente.

c) Usando a alínea b) determine duas aproximações, uma por excesso e outra por defeito, para $\int_0^1 e^x dx$.

5- Obtenha o polinómio interpolador de menor grau para uma função f(x) da qual se conhecem os valores $f(0) = 5$, $f'(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f'(1) = 4$, $f''(1) = 6$.

6- Dados os pontos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0,1,\ldots,n$, onde $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$, prove que existe e é único o polinómio P_n, de grau menor ou igual a n, tal que $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,n$.

FORMULÁRIO

Método de Newton (F(X)=0)

$$J(X^{(n-1)})X^{(n)} = J(X^{(n-1)})X^{(n-1)} - F(X^{(n-1)}),\ n = 0,1,\ldots$$

Método de Gauss-Seidel (Ax=b)

$$A = D - L - U, \qquad x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Polinómio interpolador de Lagrange

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x), \qquad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \quad i=0,1,\ldots,n$$

Polinómio interpolador de Newton das diferenças divididas

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + \ldots + f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

Polinómio interpolador de Newton das diferenças Δ

$$P(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

Regra dos Trapézios e respectivo erro

$$I_T = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_T = -(b-a)\frac{h^2}{12}f''(\xi) \qquad \xi \in (a,b)$$

Regra de Simpson e respectivo erro

$$I_S = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_S = -(b-a)\frac{h^4}{180}f^{IV}(\xi) \qquad \xi \in (a,b)$$