Departamento de Matemática

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Licenciatura em Matemática e Eng. Geográfica

5 de Fevereiro de 2003 | Duração: 2h 30m

---

1. Considere o sistema não linear

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \sin(x) \end{cases}$$

   (a) Localize graficamente as soluções do sistema e aproxime a solução de abcissa positiva usando uma iteração do método de Newton. Utilize $X^{(0)} = [0.5 \ \ 0.5]^T$ e justifique se esta é uma boa escolha para a aproximação inicial.

   (b) Utilizando a alínea anterior, indique um valor aproximado para a raiz da equação não linear

$$\sqrt{1 - x^2} = \sin(x).$$

   [NOTA: Caso não tenha resolvido a alínea anterior, utilize o método da bissecção para calcular uma aproximação dessa raiz com uma casa decimal correcta.]

   (c) Considere a região do plano definida por

$$y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \leq \sin(x).$$

   Determine um valor aproximado da área daquela região, com 2 casas decimais correctas, recorrendo à regra dos trapézios.

2. Considere o sistema linear $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/8 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine $P(\lambda)$, o polinómio característico de A.

   (b) Localize <u>todas</u> as raízes da equação $P(\lambda) = 0$. Separe, em seguida, as suas raízes reais. [<u>NOTA</u>: Caso não tenha resolvido a alínea anterior, considere o polinómio $Q(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2/3 + \lambda/4 - 1/12$ nas restantes alíneas deste exercício.]

   (c) Use o método de Newton para determinar uma aproximação para a maior raiz real de $P(\lambda) = 0$ (duas iterações).

   (d) Para aproximar a solução $\mathbf{x}$ de $A\mathbf{x} = b$, pretende-se utilizar o método iterativo de Jacobi. Diga o que pode afirmar sobre a convergência deste método.

   (e) Aplique o método de <u>Gauss-Seidel</u> duas vezes para aproximar a solução de $Ax = b$.

3. (a) Prove que conhecida uma função $f(x)$ em $(n+1)$ pontos distintos $x_i, i \in \{0,\ldots,n\}$, existe e é único o polinómio interpolador $P_n(x)$ para $f(x)$, nesses pontos x_i.
   (b) Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau 3, $H_3(x)$, para a função
   $$f(x) = \cos(x) - \sin(x), \quad x \in [0, \pi/2].$$
   (c) Indique um majorante para o erro cometido na aproximação de $f(x)$ em todo o intervalo.
   (d) A partir do valor de $H_3(\pi/8)$ e $H_3'(\pi/8)$, calcule uma aproximação para $\sin(\pi/8)$ e $\cos(\pi/8)$.

4. Considere a seguinte equação diferencial $y'(t) = y(t)+1,\ t \in [0,1]$ com a condição inicial $y(0) = 0$.
   (a) Aproxime $y(1)$ pelo método de Euler com o passo $h = 1/2$.
   (b) Indique uma aproximação para o erro cometido.

FORMULÁRIO

Interpoladora de Newton das diferenças divididas

$$f(x) \approx P_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots + f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}).$$

Fórmula do erro para a interpolação polinomial

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}.$$

Método de Newton-Raphson $(f(x)=0)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0,1,2,\ldots.$$

Método de Newton-Raphson para sistemas $(\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0)$

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - J_{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{X}^{(k)})\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}), \qquad k = 0,1,2,\ldots.$$

Método de Jacobi $(Ax = b)$

$$A = D - E - F$$
$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E+F)x^{(k)} + D^{-1}b, \qquad k = 0,1,2,\ldots.$$

Método de Gauss-Seidel $(Ax = b)$

$$A = D - E - F$$
$$x^{(k+1)} = (D-E)^{-1}Fx^{(k)} + (D-E)^{-1}b, \qquad k = 0,1,2,\ldots.$$

Regra dos Trapézios

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Fórmula do erro para a regra dos Trapézios

$$E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi), \qquad \xi \in (a,b).$$

Método de Euler

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i).$$