Departamento de Matemática

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Análise Numérica I

Licenciatura em Matemática e Eng. Geográfica

21 de Fevereiro de 2003 — Duração: 2h 30m

---

1. Para aproximar $\sqrt{5}$ consideramos os seguintes métodos iterativos:

   (a) $x = x^2 + x - 5$; (b) $x = \dfrac{5}{x}$; (c) $x = \dfrac{x+5}{x+1}$;

   Analise o comportamento do método do ponto fixo em cada um dos casos. Convergência

2. Dada a equação algébrica $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$

   (a) Mostre que existe uma única raiz dessa equação no intervalo $[1, 2]$.

   (b) Para aproximar essa raiz, consideraram-se dois métodos iterativos cujas funções iteradoras são:

   Newton

   $$g_1(x) = \frac{20}{x^2 + 2x + 10}; \qquad g_2(x) = x - \frac{x^3 + 2x^2 + 10x - 20}{3x^2 + 4x + 10}.$$

   i. Usando a aproximação inicial $x_0 = 2$, verifique se estão satisfeitas as condições de convergência para cada um dos métodos.

   ii. Diga qual dos dois métodos converge mais rapidamente, justificando a resposta.

   Newton.

3. Localize a raiz única da equação $1 - 2x + \cos(x) = 0$ e determine o número de iterações necessárias para a aproximar, com uma precisão de 0.5×10^{-3}, pelo método da bissecção.

   $|\Delta x_n| = \frac{1}{2^n} |b-a|$

4. Considere a seguinte tabela de valores

x	-3	-1	1	3
$f(x)$	-33	14	-2	22
	1	2	3	4

   (a) Aproxime $f(2)$ usando o polinómio interpolador mais conveniente;

   (b) Analisando as variações de sinal de $f(x)$ nesta tabela, vemos que terá três raízes em $[-3, 3]$. Aproxime uma dessas raízes, usando interpolação inversa.

   (c) Obtenha o valor aproximado de $\int_{-3}^{3} f(x)dx$, usando a regra dos trapézios e dê uma estimativa do erro cometido nessa aproximação.

5. Localize, usando representação gráfica, as raízes do sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ \ln(x) - y = 0 \end{cases}$$

   e aproxime a de maior abcissa, pelo método de Newton, com 2 iterações.

v.s.f.f.

6. Para aproximar a solução (x, y, z) dum sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = b$ usou-se o seguinte método iterativo:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = -0.6y^{(k)} - 0.6z^{(k)} + 1 \\ y^{(k+1)} = -0.6x^{(k)} - 0.6z^{(k)} + 1 \\ z^{(k+1)} = -0.6x^{(k)} - 0.6y^{(k)} + 1 \end{cases}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

X (a) Escreva a matriz de iteração, M, do método e verifique se esse método é convergente, justificando a sua resposta.

(b) Os elementos do vector b foram perturbados pelas quantidades $(\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3)^T$. Prove que o erro $\Delta\mathbf{x}$ que daí resulta para a solução do sistema $A(\Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}) = (b + \Delta b)$ satisfaz a

$$||\Delta\mathbf{x}|| \leq ||A^{-1}|| \times ||\Delta b||.$$

7. (a) Mostre que a única solução da equação diferencial

$$y' = y - x^2$$

que satisfaz à condição inicial $y(0) = 2$ é dada por $y(x) = x^2 + 2x + 2$.

(b) Com y_i aproximação para $y(x_i)$ e usando o método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

obtenha uma aproximação para $y(0.2)$ partindo de $y(0) = 2$ com passo $h = 0.1$.

(c) Qual é o erro de truncatura do método de Euler?
[Sugestão: use a fórmula de Taylor para $y(x)$.]

FORMULÁRIO

Interpoladora de Newton das diferenças divididas

$$f(x) \approx P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Fórmula do erro para a interpolação polinomial

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}.$$

Método de Newton-Raphson $(f(x) = 0)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Método de Newton-Raphson para sistemas $(\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0)$

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - J_{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{X}^{(k)})\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Regra dos Trapézios

$$I_T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Fórmula do erro para a regra dos Trapézios

$$E_T(f) = -\frac{h^2}{12}(b - a)f''(\xi), \qquad \xi \in (a, b).$$