Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Matemática Numérica I

23 de Junho de 2004 2h30

I

1. Considere a equação $f(x) = 0$, com a raiz x^* em (a, b), reescrita na sua forma equivalente $x = g(x)$ com $g : [a, b] \to [a, b], |g'(x)| < 1, x \in (a, b)$. Seja (x_n) a sucessão gerada pelo método

$$x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, \ldots,$$

com $x_0 \in [a, b]$. Mostre que se $g'(x^*) = 0$ e $g''(x) \neq 0$ em $[a, b]$, então

$$|x^* - x_{n+1}| \leq Const. |x^* - x_n|^2.$$

2. Suponha que a raiz da equação $f(x) = 0$ em $[a, b]$ é dupla e que aplica o método de Newton. Qual é a relação entre os erros de duas iterações consecutivas?

[**Observação:** Considere a alínea anterior e note que se x^* é zero duplo de f, então $f(x) = (x - x^*)^2 h(x)$ com $h(x^*) \neq 0$.]

3. Considere agora o método de Newton modificado

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, \ldots.$$

(a) Mostre que o método anterior tem convergência quadrática.

(b) Considere a equação

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Aplique o método de Newton modificado duas vezes para determinar uma aproximação para a raiz positiva da equação anterior.

II

1. Seja $P_3(x)$ o polinómio interpolador de Lagrange de uma função f da qual se conhecem os valores $y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3$, em que $x_{i+1} - x_i = h$. Mostre que se $|f^{(4)}| \leq M$ em $[x_0, x_3]$, então

$$|e(x)| = |f(x) - P_3(x)| \leq \frac{Mh^4}{16}, x \in [x_0, x_3].$$

2. Considere $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} cos(xsen(t))dt, x \in [x_0, x_3]$. Como deve escolher h para que o erro $|e(x)|$ seja inferior a ϵ.

3. Seja

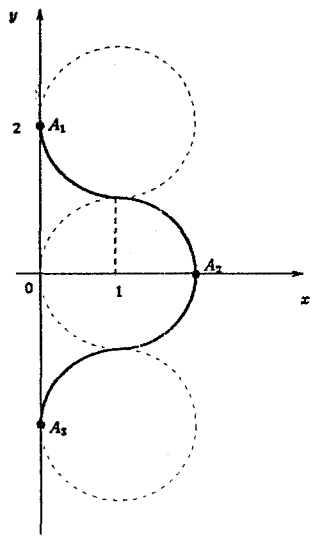
$$S_{i-1}(x) = -M_{i-1}\frac{(x - x_i)^3}{6h} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + \left(f_{i-1} - M_{i-1}\frac{h^2}{6}\right)\frac{-x + x_i}{h} + \left(f_i - M_i\frac{h^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h},$$

em que $x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, 3$, e (M_0, M_1, M_2, M_3) é solução do sistema

$$h\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \\ \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h} \\ \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h} \\ f'(x_3) - \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} \end{bmatrix}.$$

Seja $S(x)$ o polinómio cúbico segmentado que em $[x_{i-1}, x_i]$ é igual a $S_{i-1}(x), i = 1, 2, 3$. Mostre que $S(x)$ é o spline cúbico completo de f em $[x_0, x_3]$.

4. Comente a afirmação: "Os polinómios P_3 e S traduzem fielmente a regularidade de f."
5. Determine, utilizando splines, as equações paramétricas da curva representada na figura seguinte



III

1. Considere o sistema $Ax = b$ em que A é uma matriz de ordem n. Mostre que se A é estritamente diagonal dominante por linhas, então a sucessão gerada pelo método de Jacobi é convergente.
2. Seja
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & \alpha & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$
   (a) Indique valores de α para os quais o método de Jacobi gera uma sucessão convergente.
   (b) Considere $\alpha = 0$ e $x^{(0)} = (0, 0, 0)$. Determine $x^{(2)}$.
3. Seja $a \in \mathbb{R}^3$, $H = I - \dfrac{2}{w^T w} w w^T$ a matriz de Householder, em que I denota a matriz identidade de ordem 3, $w = a + sgn(a_1)\sqrt{a^T a} e_1$ e $e_1 = (1, 0, 0)$. Mostre que $Ha = -sgn(a_1)\sqrt{a^T a} e_1$.
4. Seja
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Utilizando transformações de Householder, determine a factorização QR de B.
   (b) Dtermine, utilizando a alínea anterior a solução dos mínimos quadrados de $Bx = b$ com $b = (1, 1, 1)$.