Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Matemática Numérica I

16 de Julho de 2004 (Recurso) 2h30

I

1. Considere a equação $f(x) = 0$, com raiz x^* em (a, b), reescrita na sua forma equivalente $x = g(x)$ com $g : [a, b] \to [a, b], |g'(x)| < 1, x \in (a, b)$. Seja (x_n) a sucessão gerada pelo método

$$x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, \ldots,$$

com $x_0 \in [a, b]$. Mostre que se $g'(x^*) = 0, g''(x^*) = 0$, então

$$|x^* - x_{n+1}| \leq Const.|x^* - x_n|^3.$$

2. Considere o método

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2 - \frac{1}{2}f(x_n)f''(x_n)}, n = 0, 1, \ldots.$$

Mostre que $|x_{n+1} - x^*| \leq Const.|x_n - x^*|^3$.

3. Considere a equação

$$x^4 - 3 = 0.$$

(a) Utilizando o método de Newton, determine $\tilde{x}_2$.

(b) Aplicando o método da alínea 2, determine x_2.

(c) Seja (x_n) a sucessão determinada pelo método da alínea 2 e $(\tilde{x}_n)$ a sucessão gerada pelo método de Newton. Comente a afirmação " A partir de certa ordem, $|x^* - x_n|$ é inferior a $|x^* - \tilde{x}_n|$."

II

1. Seja f uma função da qual se conhecem os valores $f(x_i), i = 0, 1, 2$. Seja P o polinómio de Lagrange para os dados anteriores e suponha que $|f^{(3)}(x)| \leq M$ em $[x_0, x_2]$. Mostre que

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), x \in [x_0, x_2].$$

2. Considere a função definida em $[x_0, x_3]$ da qual se conhecem os valores $f(x_i), i = 0, \ldots, 3$. Determine o polinómio S definido em $[x_0, x_3]$, de grau 2 em $[x_0, x_2]$ e de grau 1 em $[x_2, x_3]$, tal que $S(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3$.

3. Suponha que pode escolher, na alínea anterior, os pontos $x_i, i = 1, 2, 3$. Indique uma condição sobre os pontos anteriores de modo a que seja válida a seguinte estimativa $|f(x) - S(x)| \leq \epsilon, x \in [x_0, x_3]$.

4. Considere o quadrado e a partição em triângulos representados na figura 1

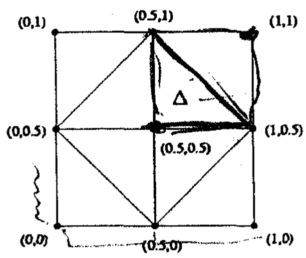

Figura 1

Seja F uma função da qual se conhecem os valores $F(x_i, y_j), i, j = 0, 1, 2$, S o polinómio interpolador segmentado linear definido a partir da triangulação e P_s o polinómio interpolador de Lagrange segmentado linear em x e em y.

(a) Determine $S(x, y)$ para $(x, y) \in \Delta$.

(b) Comente a afirmação: " Em Δ, os polinómios S e P_s são igualmente precisos."

III

1. Seja x^* a solução do sistema $Ax = b$ em que A é uma matriz de ordem n. Seja $(x^{(m)})$ a sucessão de aproximações gerada pelo método estacionário

$$x^{(m+1)} = Gx^{(m)} + c, m = 0, 1, \ldots.$$

Mostre que se $\|G\|_\infty < 1$, então $(x^{(m)})$ converge para x^* e

$$\|x^{(m)} - x^*\|_\infty \leq \frac{\|G\|_\infty^m}{1 - \|G\|_\infty} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty.$$

2 2. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & \alpha & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e o método

$$\begin{bmatrix} x_1^{(m+1)} \\ x_2^{(m+1)} \\ x_3^{(m+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ -1/3 & -\alpha/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(m)} \\ x_2^{(m)} \\ x_3^{(m)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Indique valores de α para os quais o método é convergente.

~~(b)~~ Tome $\alpha = 0$ e $x^{(0)} = (1, 1, 1)$. Determine $x^{(m)}$ tal que $\|x^{(m)} - x^*\|_\infty \leq \frac{1}{2}$.

3. (a) Considere o sistema $Ax = b$ em que A é uma matriz de ordem n simétrica definida positiva. Sejam $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$, $p^{(0)} = r^{(0)}, \alpha_0 = (p^{(0)}, r^{(0)})/(p^{(0)}, Ap^{(0)})$.

Seja $(x^{(m)})$ definida por

i. $\alpha_m = (p^{(m)}, r^{(m)})/(p^{(m)}, Ap^{(m)})$
ii. $x^{(m+1))} = x^{(m)} + \alpha_m p^{(m)}$,
iii. $r^{(m+1)} = r^{(m)} - \alpha_m Ap^{(m)}$,
iv. $\beta_m = -(r^{(m+1)}, Ap^{(m)})/(p^{(m)}, Ap^{(m)})$
v. $p^{(m+1)} = r^{(m+1)} + \beta_m p^{(m)}$.

Mostre que

$$\|x^{(m+1)} - x^*\|_A = \min_{y \in S^{(m)}} \|y - x^*\|_A,$$

em que $S^{(m)} = \{x = x^{(0)} + \sum_{j=0}^{m} \gamma_j p^{(j)}, \gamma_j \in \mathbb{R}\}$.

(b) Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determine a aproximação $x^{(1)}$ pelo método dos gradientes conjugados com $x^{(0)} = (0, 0, 0)$.