Departamento de Matemática da FCTUC
Matemática e Engenharia Geográfica
Matemática Numérica I

Exame Normal **2h45m**
29 de Junho de 2005

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados. **Não é permitido o uso de qualquer tipo de máquina de calcular.**

1. Considere a equação $x^3 + x - 1 = 0$

   (a) Prove que a equação tem uma única raiz real α e determine um intervalo que a contenha.

   (b) Que método iterativo para aproximar α gera a sucessão

   $$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$$

   (c) Determine sob que condições o método da alínea anterior converge para α.

   (d) Determine a primeira iteração do método tomando $x_0 = 3/4$.

2. Seja f uma função real de variável real, conhecida nos pontos

   $f(0.30) = 0.10$, $f(0.40) = 0.30$, $f(0.50) = 0.40$.

   (a) Obtenha uma aproximação de f(0.35) usando um polinómio de grau 2.

   (b) Admitindo que $f \in C^3([0,1])$ e que $\max_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)| = 1$, calcule um majorante do erro do resultado obtido na alínea anterior.

3. Sejam $l_0(x),\ l_1(x), \ldots l_n(x)$ os polinómios de Lagrange de grau n associados aos nós distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, onde $\quad l_i(x) = \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$.

   Considere a função $g(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) - 1$.

   (a) Prove que $g(x) = 0$ tem $n + 1$ raízes.

   (b) Prove que $g(x) = 0$, para todo o x.

4. O sistema $\begin{cases} x - ay &= 1 \\ -ax + y &= 2 \end{cases}$

   pode, sob certas condições, ser resolvido pelo método iterativo

   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -wa & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-w & wa \\ 0 & 1-w \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Se $a = -1/2$ e $w = 1/2$ o método converge?

   (b) Verifique para que valores de a o método iterativo converge, se $w = 1$.

   (c) Prove que se $w = 2$, não existe nenhum $a \in \mathbb{R}$ para o qual o método converge.

5. Considere o sistema $Ax = b$ em que A é uma matriz de ordem n simétrica definida positiva. Considere o seguinte método de direcções conjugadas onde os vectores A-conjugados $p^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ são dados *a priori*, assim como a estimativa inicial $x^{(0)}$.

Temos que, $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$, $\alpha_0 = p^{(0)T} r^{(0)} / p^{(0)T} A p^{(0)}$ e $x^{(m)}$ é dada pelo método

i. $\alpha_m = p^{(m)T} r^{(m)} / p^{(m)T} A p^{(m)}$

ii. $x^{(m+1)} = x^{(m)} + \alpha_m p^{(m)}$,

iii. $r^{(m+1)} = r^{(m)} - \alpha_m A p^{(m)}$,

Suponhamos que escolhemos a estimativa inicial dada por $x^{(0)} = x - p^{(n-1)}$.

(a) Mostre que nestas condições $r^{(0)} = Ap^{(n-1)}$.

(b) Mostre ainda que $x^{(0)} = x^{(1)} = \ldots = x^{(n-1)}$ e $x^{(n)} = x$.

(c) Considere o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

i. Sabendo que $p^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ determine um vector A-conjugado $p^{(0)}$.

ii. Considerando $x^{(0)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ determine, usando o método descrito acima, a aproximação $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$, justificando convenientemente.

6. Quando $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tem característica m, é possível definir uma inversa *à direita* de A, dada por

$$A^{\oplus} = A^T \left(AA^T\right)^{-1}.$$

(a) Prove que $AA^{\oplus} = I \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$.

(b) Escreva $A^{\oplus}$ em função da decomposição QR de A^T.

(c) Escreva $A^{\oplus}$ em função da DVS de A^T dada na forma reduzida.

7. **MATLAB**: Dados u = [3 1 2], v=[7 1 -2] explique o que significam os seguintes comandos, apresentando o resultado:

a. [u; v]

b. u'*v

c. norm(u,2)

d. norm(v,inf)