Departamento de Matemática da FCTUC
Matemática e Engenharia Geográfica
Matemática Numérica I

Exame Recurso **2h45m**
19 de Julho de 2005

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados. **Não é permitido o uso de qualquer tipo de máquina de calcular.**

1. Considere a equação $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$

   (a) Indique um intervalo para a raiz real de $f(x) = 0$.

   (b) Prove que o método de Newton é convergente quando aplicado a $f(x) = 0$ no intervalo $[a, b]$ encontrado em (a).

   (c) Determine a iteração x_2.

   (d) Sabendo que o erro do método de Newton satisfaz a relação

   $$e_{n+1} \leq \frac{M_2}{2m_1} e_n^2 \quad \text{onde} \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \quad \text{e} \quad m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

   determine um majorante para o e_2, isto é, o erro associado à iteração x_2.

2. Construa a tabela de diferenças progressivas para a função f onde $f(0.5) = 1$, $f(0.6) = 2$ e $f(0.7) = 5$ e use interpolação quadrática para aproximar $f(0.63)$.

3. Considere a função real de variável real

   $$g(t) = f(t) - p_n(t) - E_n(x)\frac{(t - x_0)(t - x_1)\ldots(t - x_n)}{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}$$

   onde p_n é o polinómio de Lagrange de grau n interpolador de f em $x_0, \ldots, x_n$, $x \neq x_i, i = 0, \ldots, n$ e $E_n(x) = f(x) - p_n(x)$.

   (a) Determine o número de zeros da função g.

   (b) Determine $g^{(n+1)}(t)$.

   (b) Usando as alíneas anteriores determine uma expressão para o erro $E_n(x)$.

4. Suponha que é possível reescrever o sistema $Ax = b$ na forma equivalente $x = Mx + c$, onde

   $$M = \begin{bmatrix} 1/2 & a \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Verifique para que valores de a o método iterativo $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c$ é convergente.

   (b) Seja $a = 0$

   i. O método iterativo converge?

   ii. Determine a solução exacta α do sistema.

   iii. Considerando $x^{(0)} = (0, 0)$, aproxime a solução exacta determinando $x^{(2)}$.

   iv. Calcule $||x^{(2)} - \alpha||_\infty$.

5. Considere o sistema $Ax = b$ em que A é uma matriz de ordem n simétrica definida positiva. Sejam $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$, $p^{(0)} = A^T r^{(0)}$, $\alpha_0 = {p^{(0)}}^T r^{(0)} / {p^{(0)}}^T A p^{(0)}$.

   Seja $x^{(m)}$ definida por

   i. $\alpha_m = {p^{(m)}}^T r^{(m)} / {p^{(m)}}^T A p^{(m)}$

   ii. $x^{(m+1)} = x^{(m)} + \alpha_m p^{(m)}$,

   iii. $r^{(m+1)} = r^{(m)} - \alpha_m A p^{(m)}$,

   iv. $\beta_m = -{r^{(m+1)}}^T A p^{(m)} / {p^{(m)}}^T A p^{(m)}$

   v. $p^{(m)} = A^T r^{(m)}$.

   (a) Mostre que se A é ortogonal então as direcções $p^{(m)}$ definidas acima são A-conjugadas.

   (b) Considere o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

      i. Considerando $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ determine a aproximação $x^{(1)}$ pelo método descrito.

      ii. Prove que A não é ortogonal.

      iii. O que pode concluir sobre as direcções $p^{(m)}$?

6. Considere o sistema $Ax = b$ dado por

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Prove que os valores próprios de $A^T A$ são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 21$.

   (b) Determine a DVS reduzida de A.

   (c) Use a alínea anterior para resolver o sistema no sentido dos mínimos quadrados.

7. **MATLAB**: Dado x=[2 5 1 6 7] indique que comando da linguagem MATLAB lhe permite executar cada uma das seguintes alíneas:

   a. Adicionar 16 a cada elemento

   b. Adicionar 3 apenas aos elementos com índice ímpar

   c. Calcular a raíz quadrada de cada elemento

   d. Calcular o quadrado de cada elemento