Departamento de Matemática da FCTUC
**Matemática e Engenharia Geográfica** Exame Modelo
Matemática Numérica I **2 de Junho de 2005**

**Observação:** A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados. **Não é permitido o uso de qualquer tipo de máquina de calcular.**

1. Considere a equação $e^x - 4x^2 = 0$

   (a) Indique um intervalo para a maior raiz $\alpha$.

   (b) Indique um método iterativo do ponto fixo, que convirja, nesse intervalo, para a raiz $\alpha$ e indique um valor inicial $x_0$.

   (c) Sabendo que $e_{n+1} \leq ke_n, n \in \mathbb{N}$, onde $e_n = |x_n - \alpha|$, prove que $e_{n+1} \leq k^{n+1}e_0$

   (d) Para o método iterativo escolhido e o ponto $x_0$ da alínea (b) indique um majorante para o erro quando aproximamos $\alpha$ pelo valor aproximado $x_4$.

2. Seja $p_3(x)$ o polinómio interpolador de Lagrange de uma função $f$ da qual se conhecem os valores $y_i = f(x_i), i = 0,1,2,3$, em que $x_{i+1} - x_i = h$. Mostre que se $|f^{(4)}| \leq M$ em $[x_0, x_3]$, então
$$|e(x)| = |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{Mh4}{16}, \; x \in [x_0, x_3].$$

3. Seja
$$S_{i-1}(x) = -M_{i-1}\frac{(x-x_i)}{2h} + M_i\frac{(x-x_{i-1})}{2h} + \left(f_{i-1} - M_{i-1}\frac{h}{3}\right)\frac{-x+x_i}{h} + \left(f_i - M_i\frac{h}{3}\right)\frac{x-x_{i-1}}{h},$$
em que $x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,2,3$, e $(M_0, M_1, M_2, M_3)$ é solução do sistema
$$h\begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [f(x_1) - f(x_0)]/h - f'(x_0) \\ [f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)]/h \\ [f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)]/h \\ f'(x_3) - [f(x_3) - f(x_2)]/h \end{bmatrix}.$$
Seja $S(x)$ o polinómio cúbico segmentado que em $[x_{i-1}, x_i]$ é igual a $S_{i-1}(x), i = 1,2,3$. Mostre que $S(x)$ é o spline cúbico completo de $f$ em $[x_0, x_3]$.

4. Considere o sistema $\begin{cases} ax + y &= 1 \\ x + 4y &= 2 \end{cases} \quad a > 0$

   (a) Verifique para que valores de $a$ o método iterativo de Jacobi converge, calculando os valores próprios da matriz de iteração.

   (b) Faça o mesmo da alínea (a) para o método de Gauss-Seidel.

   (c) Para que valores de $a$ o método de Gauss-Seidel converge e o método de Jacobi não converge?

5. (a) Considere o sistema $Ax = b$ em que $A$ é uma matriz de ordem $n$ simétrica definida positiva. Sejam $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$, $p^{(0)} = r^{(0)}$, $\alpha_0 = {p^{(0)}}^T r^{(0)} / {p^{(0)}}^T A p^{(0)}$. Seja $x^{(m)}$ definida por

   i. $\alpha_m = {p^{(m)}}^T r^{(m)} / {p^{(m)}}^T A p^{(m)}$

   ii. $x^{(m+1)} = x^{(m)} + \alpha_m p^{(m)}$,

   iii. $r^{(m+1)} = r^{(m)} - \alpha_m A p^{(m)}$,

   iv. $\beta_m = -{r^{(m+1)}}^T A p^{(m)} / {p^{(m)}}^T A p^{(m)}$

   v. $p^{(m+1)} = r^{(m+1)} + \beta_m p^{(m)}$.

   Mostre que

$$\|x^{(m+1)} - x^*\|_A = \min_{y \in S^{(m)}} \|y - x^*\|_A,$$

   em que $S^{(m)} = \{y : y = x^{(0)} + \sum_{j=0}^{m} \gamma_j p^{(j)}\, , \gamma_j \in \mathbb{R}\}$.

   (b) Considere o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   Considerando $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ determine a aproximação $x^{(1)}$ pelo método dos gradientes conjugados.

6. Seja $Q$ a matriz dada por $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule $P = I - QQ^T$ e mostre que se trata de um projector ortogonal.

   (b) Sobre que subespaço projecta $P$ ortogonalmente?

   (c) Calcule a solução no sentido dos mínimos quadrados de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   utilizando, apenas, a matriz $Q$.

   (d) Calcule a decomposição em valores singulares de $Q$.

7. **MATLAB**: Dado x = [3 1 5 7 9 2 6], explique o que significam os seguintes comandos, apresentando o resultado:

   a. x(3)

   b. x(1:7)

   c. x(1:end)

   d. x(1:end-1)

   e. x(6:-2:1)

   f. x([1 6 2 1 1])

   g. sum(x)