Departamento de Matemática da FCTUC
**Matemática e Engenharia Geográfica** Exame Normal **2h30m**
Matemática Numérica I **28 de Junho de 2006**

**Observação:** A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados. **Não é permitido o uso de qualquer tipo de máquina de calcular.**

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Faça a decomposição em valores singulares na forma reduzida da matriz $A$.

   (b) Usando a alínea anterior, determine a solução de $Ax = b$ no sentido dos mínimos quadrados.

2. (a) Defina reflector de Householder.

   (b) Mostre que um reflector de Householder $H$ é uma matriz simétrica e ortogonal.

   (c) Dado $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, determine um reflector de Householder $H$ tal que $Hx = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

   (a) Escreva o método iterativo de Jacobi para o sistema $Ax = b$ na forma

   $$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c,$$

   determinando explicitamente T e c.

   (b) O método de Jacobi é convergente? Justifique convenientemente.

   (c) Para $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$ determine a iteração $x^{(2)}$, usando o método de Jacobi.

4. (a) Dado um conjunto de direcções A-conjugadas $\{p_1, \ldots, p_n\}$ e sabendo que

   $$x^* = \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n$$

   é solução do sistema $Ax = b$, prove que

   $$\alpha_k = \frac{p_k^T b}{p_k^T A p_k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

(b) Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

i. Verifique se A é simétrica e definida positiva.

ii. Dado $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ determine um vector $p_2$ tal que $\{p_1, p_2\}$ seja um conjunto de direcções A-conjugadas.

iii. Sem resolver o sistema $Ax = b$ directamente, e usando a alínea (a) determine $\alpha_1, \alpha_2$ e $x^*$ tal que $x^* = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$ onde $x^*$ é a solução exacta do sistema $Ax = b$.

5. Seja $f(x) = \frac{1}{2+x}$, $x \in [-1, 1]$.

   (a) Determine um polinómio $p_2(x)$ de grau 2 que aproxime a função $f(x)$ no intervalo $[-1, 1]$, escolhendo nodos equidistantes.

   (b) Determine um majorante para o erro cometido com esta aproximação, ou seja, um majorante para $||f - p_2||_\infty$ onde

$$||f - p_2||_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)|.$$

6. (a) Seja $\alpha$ uma raiz de $x = g(x)$, e $g(x)$ uma função com derivadas contínuas até à ordem p, para todo o x real. Seja

$$g'(\alpha) = \ldots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad p \geq 2$$

   Prove que a iteração $x_{n+1} = g(x_n)$, $n \geq 0$ tem ordem de convergência p.

   (b) Mostre que o método iterativo,

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}, \quad a \neq 0$$

   que determina uma aproximação de $\sqrt{a}$, tem convergência de ordem **3.**

   (c) Usando $x_0 = 2$ como a estimativa inicial para aproximar $\sqrt{5}$, determine $x_1$.