Departamento de Matemática da FCTUC
Matemática e Engenharia Geográfica — Exame de Recurso **2h30m**
Matemática Numérica **I** — **18 de Julho de 2006**

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados. **Não** é **permitido o uso de qualquer tipo de máquina de calcular.**

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$.

   (a) Faça a decomposição QR da matriz A, onde Q E $\mathbb{R}^{4\times 2}$ é uma matriz ortogonal e R E $\mathbb{R}^{2\times 2}$ é uma matriz triangular superior.

   (b) Usando a alínea anterior, determine a solução de $Ax = b$ no sentido dos mínimos quadrados.

2. (a) Seja A uma matriz simétrica e seja λ^* um valor próprio de A e v^* o vector próprio associado a λ^*, com $||v^*||_2 = 1$. Seja P uma matriz ortogonal tal que

$$Pv^* = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Considere a matriz $B = PAP^T$. Determine Be_1.

   (li) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 2 \\ 10 & i & -8 \\ 2 & -8 & 11 \end{bmatrix}$.

   i. Verifique que $\lambda = 9$ é um valor próprio de A associado ao vector próprio $v = [2/3 \ 1/3 \ 2/3]^T$.

   ii. Determine uma matriz de Householder P tal que $Pv = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   iii. Determine a primeira coluna de $B = PAP^T$

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (a) Resolva o sistema, $Ax = b$, utilizando eliminação de Gauss.

   (b) Escreva o método iterativo de Jacobi para este sistema na forma $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$, determinando explicitamente T e c.

(c) Para $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$ determine a iteração $x^{(3)}$, usando o método de Jacobi.

(d) Sabendo que o erro na iteração k é dado por $e^{(k)} = x - x^{(k)}$, onde x é a solução exacta de $Ax = b$, prove que $e^{(k)} = T^k e^{(0)}$.

(e) Determine $||e^{(3)}||_\infty$.

4. Seja $\phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$, onde $A \in IR^{nXn}$ é uma matriz simétrica e definida positiva e $b \in IR^n$. Seja ainda

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \ \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

onde $x_0 \in IR^n$ é dado e $\{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$ é um conjunto de direcções A-conjugadas. Temos ainda que α_k é solução do problema

$$\min_\alpha \phi(x_k + \alpha p_k).$$

(a) Mostre que $\alpha_k = -\frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k}$ onde $r_k = Ax_k - b$.

(b) Sejam $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, p $= -r_0$ e $x_0 = [0\ 0]^T$

i. Determine x_1 e r_1.

ii. Supondo que p_0, r_1 e A são dados, mostre como determinaria β_1, sabendo que $p_1 = -r_1 + \beta_1 p_0$, onde p_0, p_1 são direcções A-conjugadas.

iii. Usando a alínea anterior determine β_1 e p_1.

5. Seja $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

(a) Determine o polinómio cúbico de Hermite $h_3(x)$, que interpola a função $f(x)$ nos pontos $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

(b) Determine $h_3(1/2)$.

(c) Determine um majorante para o erro cometido com a aproximação da alínea anterior.

6. Seja $f(x) = x^2 - x - 2$.

(a) Considere a iteração do ponto fixo $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ e verifique, justificando convenientemente, se esta iteração converge para uma raiz de $f(x) = 0$.

(b) Escreva a iteração do método de Newton-Raphson que determina uma aproximação das raízes de $f(x) = 0$.

(c) Para o método de Newton-Raphson da alínea anterior

i. Determine x_1 e x_2 considerando $x_0 = 0$.

ii. Determine ainda x_1 e x_2 considerando $x_0 = 1$.