Departamento de Matemática da FCTUC
Matemática e Engenharia Geográfica Prova suplementar **2h30m**
Matemática Numérica I **11 de Julho de 2006**

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados. **Não é permitido o uso de qualquer tipo de máquina de calcular.**

1. Seja P um reflector de Householder $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definido por

$$P = I - \frac{2}{v^T v} v v^T, \quad v \neq 0 \in \mathbb{R}^n.$$

Determine os valores próprios e os vectores próprios de P.

2. Cdnsidere um sistema $Ax = b$ e a iteração $x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + b$ para $k = 0, 1, \ldots$, onde $H = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ com γ suficientemente grande e $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$, que aproxima a solução exacta do sistema.

   (a) Determine os elementos de H^k e prove que tendem para zero quando $k \to \infty$.

   (d) Sabendo que o erro na iteração k é dado por $e^{(k)} = x^* - x^{(k)}$, onde x^* é a solução exacta de $Ax = b$, prove que $e^{(k)} = H^k e^{(0)}$.

   (c) Conclua que a sucessão $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ converge para x^*

3. Prove que, se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica e definida positiva, então a iteração de Gauss-Seidel converge para qualquer $x^{(0)}$.

4. (a) Seja $p_n(x)$ o polinómio interpolador de $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos x_j, $j = 0, \ldots, n$ pertencentes a $[a, b]$. Mostre que para cada $x \in (a, b)$, existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

   (b) Prove que para os nodos de Chebyshev $x_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n+2}\right)$, temos

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) = 2^{-n}.$$

   (c) Seja $p_n(x)$ o polinómio interpolador de $\ln(x+2)$ nos nodos x_j, $j = 0, \ldots, n$ da alínea anterior. Determine n tal que

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\ln(x+2) - p_n(x)| \leq 2^{-24}.$$