Departamento de Matemática da FCTUC
Matemática e Engenharia Geográfica
Matemática Numérica **I**

Prova suplementar **2h30m**
28 **de Julho de 2006**

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados. **Não** é **permitido o uso de qualquer tipo de máquina de calcular.**

1. Seja A E IR^{nXn}. Denotemos por $\lambda(A)$ o conjunto dos valores próprios da matriz A.

   Prove que:

   (a) Se T $\in$ IR^{nXn} é uma matriz por blocos
   $$\begin{array}{cc} T = \left[\begin{array}{cc} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{array}\right] & \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad\quad p & q \end{array} & \end{array}$$

   então $\lambda(T) = \lambda(T_{11})$ U $\lambda(T_{22})$

   (b) Se A E IR^{nXn}, B E IR^{pXp}, e X $\in$ IR^{nXp}, satisfazem
   $$AX = XB, \quad \text{car}(X) = p$$
   então existe uma matriz ortogonal Q $\in$ IR^{nXn} tal que
   $$Q^T AQ = T$$
   onde
   $$\begin{array}{cc} T = \left[\begin{array}{cc} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{array}\right] & \begin{array}{c} \mathrm{P} \\ n-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad\quad p & n-p \end{array} & \end{array}$$
   e $\lambda(T_{11}) = \lambda(A)$ n $\lambda(B)$.

   (c) Se A $\in$ IR^{nXn}, então existe uma matriz ortogonal Q $\in$ IR^{nXn} tal que
   $$Q^T AQ = T = D + N$$
   onde D $=$ diag$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e N E $\mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz estritamente triangular superior. Adicionalmente, Q pode ser escolhida de forma a que os valores próprios λ_i aparecem por qualquer ordem na diagonal.

2. Prove que, se A E IR^{nXn} é simétrica e definida positiva, então a iteração de Gauss-Seidel converge para qualquer $x^{(0)}$.

3. Considere o sistema Ax $=$ b em que A é uma matriz de ordem n simétrica definida positiva. Considere o seguinte método de direcções conjugadas onde os vectores ***A***-conjugados p_k, $k = 0, 1, \ldots,$ n $- 1$ são dados a *priori*, assim como a estimativa inicial x_0.

Temos que, $r_0 =$ b $- Ax_0$, $\alpha_0 = {p_0}^T r_0 / {p_0}^T A p_0$ e x_m é dada pelo método

i. $\alpha_m = {p_m}^T r_m / {p_m}^T A p_m$

ii. $x_{m+1} = x_m + \alpha_m p_m$,

iii. $r_{m+1} = r_m - \alpha_m A p_m$,

Suponhamos que escolhemos a estimativa inicial dada por $x_0 =$ x $- p_{n-1}$. Mostre que $x_0 = x_1 = \ldots = x_{n-1}$ e x, $=$ x.

4. Seja $g(x)$ uma função contínua em [a, b], e seja $g([a, b])$ C [a, b]. Adicionalmente, suponhamos que existe um λ tal que 0 < A < 1, com

$$|g(x) - g(y)| \leq \lambda |x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b]$$

Mostre que

(a) x $= g(x)$ tem uma única solução a E [a,b].

(b) $x_n = g(x_{n-1})$ converge para a, para todo o $x_0 \in$ [a, b].

(C) la $- x_n|$ I $\frac{A''}{1 - \lambda}$ τ~0i (·