DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

MATEMÁTICA NUMÉRICA I

ANO LECTIVO DE 2007/2008 TRABALHO 2

Prazo de entrega: 31 de Outubro de 2007

Seja A uma matriz simétrica definida positiva.
Considere o seguinte algotimo

$x_0 =$ dado inicial
$r_0 = b - Ax_0$
$k = 0$
enquanto $r_k \neq 0$
    $k = k + 1$
    se $k = 1$
        $p_1 = r_0$
    caso contrário
        p_k é um minimizante de $\|p - r_{k-1}\|_2$ com $p \in \mathcal{L}\{Ap_1, \dots Ap_{k-1}\}^\perp$
    fim
    $\alpha_k = p_k^\perp r_{k-1} / p_k^T A p_k$
    $x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k$
    $r_k = b - Ax_k$
fim
$x = x_k$

1. Mostre que depois de k iterações do algoritmo anterior se tem:
   (a) $r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_k$,
   (b) $\mathcal{L}\{p_1, \dots, p_k\} = \mathcal{L}\{r_0, \dots, r_{k-1}\} = \mathcal{L}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{k-1} r_0\}$,
   (c) $p_k \in \mathcal{L}\{p_{k-1}, r_{k-1}\}, \quad k \geq 2$.

2. Considere o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.
   (a) Sabendo que $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ determine um vector A-conjugado p_0.
   (b) Considerando $x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ determine, usando o método descrito acima, as aproximações x_1 e x_2.