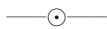


Exame Época Normal



1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

- (a) Determine os valores de  $\alpha$  para os quais  $A$  é SPD.
- (b) Resolva o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 & C \\ 0 & E & 0 \end{bmatrix}$$

com  $B \in \mathbb{R}^{m \times r}$  e característica  $m < r$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times s}$  e  $E \in \mathbb{R}^{n \times p}$  e característica  $n < p$ .

- (a) Mostre que a solução de norma  $\ell_2$  mínima de um sistema de equações lineares com essa matriz existe e é única.
- (b) Indique como poderia determinar essa solução.

3. A tabela seguinte apresenta a população de uma determinada aldeia durante quatro anos:

1950	1960	1970	1980
1230	1260	1310	1280

- (a) Mostre que o polinómio interpolador definido pelos pontos da tabela existe e é único.
  - (b) Construa esse polinómio interpolador e apresente uma estimativa da população em 1975.
4. Descreva sumariamente os principais processos para a determinação de uma raiz de uma equação não linear, apresentando as suas vantagens e desvantagens.
5. Considere a definição de norma  $\ell_2$  matricial para uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ :

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

(a) Mostre que

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

(b) Mostre que

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

onde  $\lambda_{\max}(B)$  é o maior valor próprio da matriz simétrica  $B$ .

**Cotações:**

- 1. (a) — 2.5
- (b) — 2.5
- 2. (a) — 2.0
- (b) — 2.5
- 3. (a) — 2.0
- (b) — 2.5
- 4. — 2.0
- 5. (a) — 2.0
- (b) — 2.0