Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Numérica I

Ano Lectivo 2008/2009 5 Janeiro, 2009

Exame Época Normal

1. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$
   (a) Determine os valores de α para os quais A é SPD.
   (b) Resolva o sistema de equações lineares
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 2 \end{cases}$$

2. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} B & 0 & C \\ 0 & E & 0 \end{bmatrix}$$
   com $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$ e característica $m < r$, $C \in \mathbb{R}^{m\times s}$ e $E \in \mathbb{R}^{n\times p}$ e característica $n < p$.
   (a) Mostre que a solução de norma ℓ_2 mínima de um sistema de equações lineares com essa matriz existe e é única.
   (b) Indique como poderia determinar essa solução.

3. A tabela seguinte apresenta a população de uma determinada aldeia durante quatro anos:

	1950	1960	1970	1980
	1230	1260	1310	1280

   (a) Mostre que o polinómio interpolador definido pelos pontos da tabela existe e é único.
   (b) Construa esse polinómio interpolador e apresente uma estimativa da população em 1975.

4. Descreva sumariamente os principais processos para a determinação de uma raíz de uma equação não linear, apresentando as suas vantagens e desvantagens.

5. Considere a definição de norma ℓ_2 matricial para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:
$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$
   (a) Mostre que
$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$
   (b) Mostre que
$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$$
   onde $\lambda_{\max}(B)$ é o maior valor próprio da matriz simétrica B.

Cotações:

1.	(a)	—	2.5
	(b)	—	2.5
2.	(a)	—	2.0
	(b)	—	2.5
3.	(a)	—	2.0
	(b)	—	2.5
4.		—	2.0
5.	(a)	—	2.0
	(b)	—	2.0