Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Numérica I

Ano Lectivo 2008/2009 — 30 Janeiro, 2009

Exame Época de Recurso

1. Resolva o sistema
$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 1 \\ -x_1 & & +x_3 & = & 2 \end{cases}$$
usando a decomposição LU com escolha parcial de pivot.

2. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & B_1 & 0 & C_1 \\ B_2 & C_2 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_3 \\ 0 & 0 & B_4 & C_4 \end{bmatrix}$$
com B_i matrizes não singulares, $i = 1, 2, 3, 4$. Indique como pode resolver um sistema de equações lineares com a matriz A a partir da resolução de 4 sistemas com as matrizes B_i.

3. (a) Defina decomposição SVD de uma matriz.
   (b) Mostre que $A \in$ SPD se e só se $A = LL^T$, com L uma matriz triangular inferior de elementos diagonais não nulos.
   (c) Mostre que se $A \in$ SPD então existe uma matriz $B \in$ SPD tal que $B^2 = A$.
   (d) Mostre que se I é a matriz identidade, L é uma matriz triangular inferior não singular e $A = L^T L$, então a matriz
   $$H = I - \frac{2}{v^T A v} (Lv) (Lv)^T$$
   é bem definida e ortogonal para qualquer vector v não nulo.
   (e) Mostre que se L e H são as matrizes definidas na alínea anterior, então a matriz
   $$\begin{bmatrix} H & Lv \\ (Lv)^T & 0 \end{bmatrix}$$
   é não singular para qualquer vector v não nulo.

4. Desenvolva o tema: "Interpolação Polinomial".

5. (a) Seja $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ uma função duas vezes continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^1$ e seja $\overline{x}$ uma raíz simples da equação $f(x) = 0$. Mostre que o método de Newton tem convergência local e quadrática para $\overline{x}$.
   (b) Mostre que a equação não linear $x^3 + x - 1 = 0$ tem uma e uma só raíz real e efectue uma iteração do método de Newton para a determinação dessa raíz, com um ponto inicial à sua escolha.

Cotações:

1.		—	3.5
2.		—	3.0
3.	(a)	—	0.25
	(b)	—	1.25
	(c)	—	2.0
	(d)	—	1.5
	(e)	—	1.5
4.		—	2.0
5.	(a)	—	1.5
	(b)	—	3.5