Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Numérica I

Ano Lectivo 2008/2009 15 Dezembro, 2008

Frequência

—⊙—

1. Considere a função S definida pela soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos, isto é,

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ S(n)=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

   Mostre, recorrendo à interpolação polinomial, que $S(n)$ é um polinómio de grau 3 e determine-o.

2. Considere a seguinte equação não linear

$$x^5-5x^3+10x-5=0$$

   (a) Mostre que o intervalo $[0,1]$ contém a maior raíz positiva da equação.

   (b) Mostre que a primeira iteração do método de Newton com ponto inicial $x_0=0$ obtém o mesmo ponto que a primeira iteração do método da bissecção com intervalo inicial $[0,1]$.

3. Considere a matriz

$$A=\begin{bmatrix} F & B_1 & C \\ B_2 & 0 & E \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix}$$

   onde $B_1\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $B_2\in\mathbb{R}^{n\times n}$ são matrizes não singulares, $m\neq n$, $F\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $C\in\mathbb{R}^{m\times p}$, $E\in\mathbb{R}^{n\times p}$ e $H\in\mathbb{R}^{p\times p}$ é uma matriz de Householder.

   (a) Mostre que H é ortogonal.

   (b) Mostre que um sistema de equações lineares com a matriz A tem solução única e indique como o pode resolver eficientemente.

4. Desenvolva o tema: "Resolução numérica de problemas de mínimos quadrados lineares".

5. Considere as classes de matrizes S e Z definidas a partir das seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} A\in \mathrm{S} &\Leftrightarrow \exists_{x>0}\ Ax>0 \\ A\in \mathrm{Z} &\Leftrightarrow a_{ij}\ \leq 0 \text{ para todo } i\neq j \end{aligned}$$

   (a) Mostre que se $A\in \mathrm{S}\cap \mathrm{Z}$, então $a_{11}>0$ e $(A|a_{11})\in \mathrm{S}\cap \mathrm{Z}$.

   (b) Mostre que toda a matriz $\mathrm{S}\cap \mathrm{Z}$ simétrica é PD, mas o resultado não é válido para matrizes não simétricas.

Cotações:

1.		—	2.0
2.	(a)	—	1.0
	(b)	—	1.0
3.	(a)	—	0.5
	(b)	—	1.5
4.		—	2.0
5.	(a)	—	1.0
	(b)	—	1.0