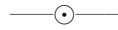


Frequência



1. Considere a função S definida pela soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos, isto é,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S(n) = \sum_{k=1}^n k^2$$

Mostre, recorrendo à interpolação polinomial, que $S(n)$ é um polinómio de grau 3 e determine-o.

2. Considere a seguinte equação não linear

$$x^5 - 5x^3 + 10x - 5 = 0$$

- (a) Mostre que o intervalo $[0, 1]$ contém a maior raiz positiva da equação.
 (b) Mostre que a primeira iteração do método de Newton com ponto inicial $x_0 = 0$ obtém o mesmo ponto que a primeira iteração do método da bissecção com intervalo inicial $[0, 1]$.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} F & B_1 & C \\ B_2 & 0 & E \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix}$$

onde $B_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes não singulares, $m \neq n$, $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $E \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $H \in \mathbb{R}^{p \times p}$ é uma matriz de Householder.

- (a) Mostre que H é ortogonal.
 (b) Mostre que um sistema de equações lineares com a matriz A tem solução única e indique como o pode resolver eficientemente.
4. Desenvolva o tema: “Resolução numérica de problemas de mínimos quadrados lineares”.
5. Considere as classes de matrizes S e Z definidas a partir das seguintes equivalências:

$$A \in S \Leftrightarrow \exists x_{>0} \quad Ax > 0$$

$$A \in Z \Leftrightarrow a_{ij} \leq 0 \text{ para todo } i \neq j$$

- (a) Mostre que se $A \in S \cap Z$, então $a_{11} > 0$ e $(A|a_{11}) \in S \cap Z$.
 (b) Mostre que toda a matriz $S \cap Z$ simétrica é PD, mas o resultado não é válido para matrizes não simétricas.

Cotações:

1. — 2.0
 2. (a) — 1.0
 (b) — 1.0
 3. (a) — 0.5
 (b) — 1.5
 4. — 2.0
 5. (a) — 1.0
 (b) — 1.0