Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Numérica I

Ano Lectivo 2009/2010 — 4 Janeiro, 2010

Exame Época Normal

1. Resolva o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 & = & 4 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 & = & 0 \end{cases}$$

usando a decomposição LU com escolha parcial de pivot.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} H & v & C \\ v^T & 0 & d^T \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}$$

com $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ uma matriz SPD, $v \in \mathbb{R}^n - \{\,0\}$, $d \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a matriz de Householder

$$H = I_n - \frac{2}{v^T v} v v^T$$

(a) Mostre que H é ortogonal.

(b) Mostre que A é não singular e indique como pode resolver eficientemente um sistema de equações lineares com essa matriz.

3. A tabela seguinte apresenta a população (em milhares de habitantes) de uma determinada cidade durante quatro anos:

1970	1980	1990	2000
120	130	150	130

(a) Mostre que o polinómio interpolador definido pelos pontos da tabela existe e é único.

(b) Construa esse polinómio interpolador e apresente uma estimativa da população em 2010.

4. Considere a equação não linear $x^3 - 3x + 1 = 0$.

(a) Mostre que a equação tem exactamente três raízes reais.

(b) Efectue uma iteração do método da secante para a determinação da maior raíz da equação.

5. Desenvolva o tema: "Resolução de sistemas de equações lineares com matrizes SPD".

6. (a) Defina decomposição SVD de uma matriz quadrada.

(b) Mostre que se A é uma matriz singular de ordem n, então existe a solução de norma ℓ_2 mínima do problema de mínimos quadrados lineares

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

(c) Mostre que se $A \in$ SPD então existe uma matriz $B \in$ SPD tal que $B^2 = A$.

Cotações:

1.		—	3.0
2.	(a)	—	1.0
	(b)	—	3.0
3.	(a)	—	1.5
	(b)	—	2.5
4.	(a)	—	1.5
	(b)	—	1.5
5.		—	2.0
6.	(a)	—	0.5
	(b)	—	1.5
	(c)	—	2.0