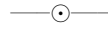


Exame Época de Recurso



1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{bmatrix}$$

- (a) Determine os valores de  $\alpha$  para os quais  $A$  é SPD.  
 (b) Resolva o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

2. Considere a função  $S$  definida pela soma dos  $n$  primeiros inteiros positivos, isto é,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S(n) = \sum_{k=1}^n k$$

Mostre, recorrendo à interpolação polinomial, que

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Considere a seguinte equação não linear

$$x^5 - 5x + 1 = 0$$

- (a) Mostre que a equação tem exactamente três raízes reais.  
 (b) Mostre que a primeira iteração do método de Newton com ponto inicial  $x_0 = 0$  obtém o mesmo ponto que a primeira iteração do método da bissecção com intervalo inicial  $[0, \frac{2}{5}]$ .

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} D & -C^T & E \\ C & 0 & F \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

com  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz diagonal de elementos diagonais positivos,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  uma matriz de característica  $m < n$ ,  $E \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$  e  $G \in \mathbb{R}^{p \times p}$  uma matriz SPD.

- (a) Mostre que  $\det(A) > 0$ .  
 (b) Indique como pode resolver um sistema de equações lineares com a matriz  $A$  usando o método SOR com parâmetro de relaxação  $\omega \in ]0, 2[$ .

5. Desenvolva o tema: “Resolução numérica de problemas de mínimos quadrados lineares”.

6. Considere a definição de norma  $\ell_\infty$  de uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

- (a) Mostre que  $\forall x \in \mathbb{R}^n: \|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|x\|_\infty$ .  
 (b) Mostre que  $\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$ .

(c) Mostre que

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

(d) Mostre que se  $A$  é uma matriz quadrada não singular,  $\bar{x}$  é solução exacta do sistema de equações lineares  $Ax = b$  e  $\tilde{x}$  é uma solução aproximada calculada por um algoritmo, então

$$\frac{\|\tilde{x} - \bar{x}\|_\infty}{\|\bar{x}\|_\infty} \leq \text{cond}_\infty(A) \frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

com  $r = A\tilde{x} - b$  e  $\text{cond}_\infty(A)$  o número de condição de  $A$  relativamente à norma  $\ell_\infty$ .

(e) Apresente uma interpretação teórica do resultado da alínea anterior.

**Cotações:**

1. (a) — 2.0  
(b) — 2.0
2. — 2.0
3. (a) — 1.5  
(b) — 1.0
4. (a) — 1.5  
(b) — 2.5
5. — 1.5
6. (a) — 0.5  
(b) — 1.0  
(c) — 2.5  
(d) — 1.5  
(e) — 0.5