Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Numérica I

Ano Lectivo 2009/2010 27 Janeiro, 2010

Exame Época de Recurso

—⊙—

1. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{bmatrix}$$
   (a) Determine os valores de α para os quais A é SPD.
   (b) Resolva o sistema de equações lineares
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \end{cases}$$

2. Considere a função S definida pela soma dos n primeiros inteiros positivos, isto é,
$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ S(n) = \sum_{k=1}^{n} k$$
Mostre, recorrendo à interpolação polinomial, que
$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Considere a seguinte equação não linear
$$x^5 - 5x + 1 = 0$$
   (a) Mostre que a equação tem exactamente três raízes reais.
   (b) Mostre que a primeira iteração do método de Newton com ponto inicial $x_0 = 0$ obtém o mesmo ponto que a primeira iteração do método da bissecção com intervalo inicial $[0, \frac{2}{5}]$.

4. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} D & -C^T & E \\ C & 0 & F \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$
com $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz diagonal de elementos diagonais positivos, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ uma matriz de característica $m < n$, $E \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $F \in \mathbb{R}^{m\times p}$ e $G \in \mathbb{R}^{p\times p}$ uma matriz SPD.
   (a) Mostre que $\det(A) > 0$.
   (b) Indique como pode resolver um sistema de equações lineares com a matriz A usando o método SOR com parâmetro de relaxação $\omega \in]0, 2[$.

5. Desenvolva o tema: "Resolução numérica de problemas de mínimos quadrados lineares".

6. Considere a definição de norma ℓ_∞ de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
$$\|A\|_\infty = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$
   (a) Mostre que $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|x\|_\infty$.
   (b) Mostre que $\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$.

(c) Mostre que

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

(d) Mostre que se A é uma matriz quadrada não singular, $\overline{x}$ é solução exacta do sistema de equações lineares $Ax = b$ e $\tilde{x}$ é uma solução aproximada calculada por um algoritmo, então

$$\frac{\|\tilde{x} - \overline{x}\|_\infty}{\|\overline{x}\|_\infty} \le \operatorname{cond}_\infty(A)\frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

com $r = A\tilde{x} - b$ e $\operatorname{cond}_\infty(A)$ o número de condição de A relativamente à norma ℓ_∞.

(e) Apresente uma interpretação teórica do resultado da alínea anterior.

Cotações:

1.	(a)	—	2.0
	(b)	—	2.0
2.		—	2.0
3.	(a)	—	1.5
	(b)	—	1.0
4.	(a)	—	1.5
	(b)	—	2.5
5.		—	1.5
6.	(a)	—	0.5
	(b)	—	1.0
	(c)	—	2.5
	(d)	—	1.5
	(e)	—	0.5