Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Numérica I

Ano Lectivo 2009/2010 14 Dezembro, 2009

Frequência

1. Considere os dados fornecidos pela tabela

x_i	-1	0	1	2
y_i	1	-1	-1	1

   Determine a equação da parábola que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos dados.

2. Considere a seguinte tabela referente a uma função polinomial

x_i	-1	0	1	2	3	4
$p(x_i)$	-1	-3	-1	5	15	29

   (a) Mostre que $p(x)$ é um polinómio interpolador de grau 2.
   (b) Determine $p(10)$.

3. (a) Seja $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ uma função duas vezes continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^1$ e seja x uma raiz simples da equação $f(x) = 0$. Mostre que o método de Newton tem convergência local e quadrática para x.
   (b) Mostre que a equação não linear $x^5+2x-1 = 0$ tem uma e uma só raíz real e efectue uma iteração do método de Newton para a determinação dessa raíz, com um ponto inicial à sua escolha.

4. Desenvolva o tema: "Resolução numérica de sistemas de equações lineares com matrizes não simétricas não singulares".

5. Considere a definição de norma ℓ_2 matricial para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

   (a) Mostre que

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

   (b) Mostre que

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$$

   onde $\lambda_{\max}(B)$ é o maior valor próprio da matriz simétrica B.
   (c) Mostre que se $c(A) = n < m$, então $\mathrm{cond}_2(A^TA) = [\mathrm{cond}_2(A)]^2$.

Cotações:

1.		—	1.5
2.	(a)	—	1.25
	(b)	—	0.25
3.	(a)	—	1.5
	(b)	—	1.5
4.		—	1.0
5.	(a)	—	0.75
	(b)	—	1.25
	(c)	—	1.0