Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Numérica I

Ano Lectivo 2010/2011 3 Janeiro, 2011

Exame Época Normal

——⊙——

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

   (a) Determine os valores de α para os quais A é SPD.

   (b) Resolva o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \end{cases}$$

2. Considere a seguinte tabela referente a uma função f:

x_i	-1	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	-1	-3	-1	5	15	29

   (a) Determine o polinómio interpolador $P(x)$ que satisfaz $P(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

   (b) Determine $P(10)$.

3. (a) Considere a sucessão de Fibonacci $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definida por

$$F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_{k+1} = F_k + F_{k-1},\ k = 2, 3, \ldots$$

   Sabendo que $\lim\limits_k \dfrac{F_{k+1}}{F_k} = \varphi$, com φ a raíz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$ (número de ouro), mostre que $(\left(\dfrac{1}{10}\right)^{F_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge superlinearmente para zero com taxa de convergência φ.

   (b) Mostre que a equação não linear $x^5 + 2x - 1 = 0$ tem uma e uma só raíz real e efectue uma iteração do método da Secante para a determinação dessa raíz, com um ponto inicial à sua escolha.

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & F & C \\ 0 & B_2 & E \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix}$$

   onde $B_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são matrizes SPD, $m \neq n$, $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $E \in \mathbb{R}^{n\times p}$ e $H \in \mathbb{R}^{p\times p}$ é uma matriz de Householder.

   (a) Mostre que H é ortogonal.

   (b) Mostre que $\det(A) < 0$.

   (c) Indique como pode resolver eficientemente um sistema de equações com a matriz A.

5. Desenvolva o tema: "Resolução numérica de problemas de mínimos quadrados lineares".

6. Seja A uma matriz $\mathrm{S} \cap \mathrm{Z}$, onde S e Z são as classes de matrizes definidas por:

$$\begin{array}{rcl} A \in \mathrm{S} & \Leftrightarrow & \exists_{x>0}\ Ax > 0 \\ A \in \mathrm{Z} & \Leftrightarrow & a_{ij} \ \leq 0 \text{ para todo } i \neq j \end{array}$$

   Mostre que

   (a) $a_{11} > 0$ e $(A|a_{11}) \in \mathrm{S} \cap \mathrm{Z}$.

   (b) $\det(A) > 0$.

   (c) Existe uma matriz diagonal D com elementos diagonais positivos tais que AD é estritamente diagonalmente dominante por linhas.

   (d) O método de Jacobi é convergente para a solução única do sistema $Ax = b$ para qualquer ponto inicial x^0 escolhido.

Cotações:

1.	(a)	—	2.0
	(b)	—	2.0
2.	(a)	—	1.5
	(b)	—	0.5
3.	(a)	—	1.5
	(b)	—	1.5
4.	(a)	—	1.0
	(b)	—	1.5
	(c)	—	2.0
5.		—	2.0
6.	(a)	—	1.5
	(b)	—	0.75
	(c)	—	0.75
	(d)	—	1.5