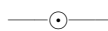


Exame Época Normal



1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

- (a) Determine os valores de α para os quais A é SPD.
 (b) Resolva o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

2. Considere a seguinte tabela referente a uma função f :

x_i	-1	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	-1	-3	-1	5	15	29

- (a) Determine o polinómio interpolador $P(x)$ que satisfaz $P(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
 (b) Determine $P(10)$.
3. (a) Considere a sucessão de Fibonacci $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definida por

$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, k = 2, 3, \dots$$

Sabendo que $\lim_k \frac{F_{k+1}}{F_k} = \varphi$, com φ a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$ (número de ouro), mostre que $\left(\left(\frac{1}{10}\right)^{F_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge superlinearmente para zero com taxa de convergência φ .

- (b) Mostre que a equação não linear $x^5 + 2x - 1 = 0$ tem uma e uma só raiz real e efectue uma iteração do método da Secante para a determinação dessa raiz, com um ponto inicial à sua escolha.
4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & F & C \\ 0 & B_2 & E \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix}$$

onde $B_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes SPD, $m \neq n$, $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $E \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $H \in \mathbb{R}^{p \times p}$ é uma matriz de Householder.

- (a) Mostre que H é ortogonal.
 (b) Mostre que $\det(A) < 0$.
 (c) Indique como pode resolver eficientemente um sistema de equações com a matriz A .

5. Desenvolva o tema: “Resolução numérica de problemas de mínimos quadrados lineares”.

6. Seja A uma matriz $S \cap Z$, onde S e Z são as classes de matrizes definidas por:

$$\begin{aligned} A \in S &\Leftrightarrow \exists_{x>0} Ax > 0 \\ A \in Z &\Leftrightarrow a_{ij} \leq 0 \text{ para todo } i \neq j \end{aligned}$$

Mostre que

- (a) $a_{11} > 0$ e $(A|a_{11}) \in S \cap Z$.
- (b) $\det(A) > 0$.
- (c) Existe uma matriz diagonal D com elementos diagonais positivos tais que AD é estritamente diagonalmente dominante por linhas.
- (d) O método de Jacobi é convergente para a solução única do sistema $Ax = b$ para qualquer ponto inicial x^0 escolhido.

Cotações:

- 1. (a) — 2.0
- (b) — 2.0
- 2. (a) — 1.5
- (b) — 0.5
- 3. (a) — 1.5
- (b) — 1.5
- 4. (a) — 1.0
- (b) — 1.5
- (c) — 2.0
- 5. — 2.0
- 6. (a) — 1.5
- (b) — 0.75
- (c) — 0.75
- (d) — 1.5