Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Numérica I

Ano Lectivo 2010/2011 — 26 Janeiro, 2011

Exame Época de Recurso

—⊙—

1. Resolva o sistema
$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & -2 \\ -x_1 & & +x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$
usando a decomposição LU com escolha parcial de pivot.

2. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} B & d & 0 \\ d^T & 0 & 0 \\ C & f & D \end{bmatrix}$$
com $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz SPD, $d \in \mathbb{R}^n - \{\ 0\}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $f \in \mathbb{R}^m$ e $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ uma matriz estritamente diagonalmente dominante por colunas.
   (a) Mostre que A é não singular.
   (b) Indique como pode resolver eficientemente um sistema de equações lineares com a matriz A.

3. Mostre que
$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
recorrendo à interpolação polinomial.

4. (a) Sejam $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ uma função duas vezes continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^1$ e $\overline{x}$ uma raíz simples de $f(x) = 0$. Mostre que o método de Newton tem convergência local e quadrática para $\overline{x}$.
   (b) Mostre que a equação não linear $3x^5 - 5x^3 + 1 = 0$ tem uma e uma só raíz real negativa e efectue uma iteração do método de Newton para a determinação dessa raíz, com um ponto inicial à sua escolha.

5. Desenvolva o tema: "Métodos iterativos para a resolução de sistemas de equações lineares e mínimos quadrados lineares".

6. (a) Mostre que se $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, então
$$|u^T v| \leq \|u\|_2\,\|v\|_2$$
com igualdade se e só se $u = \alpha\, v$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz SPD e $y, s \in \mathbb{R}^n$ satisfazem $y^T s > 0$, então
$$B = A + \frac{yy^T}{y^T s} - \frac{Ass^T A}{s^T As}$$
é SPD.
   (c) Se $u \in \mathbb{R}^n$, indique como pode calcular eficientemente o vector Bu, usando apenas produtos escalares de vectores e produtos da matriz A por vectores.

Cotações:

1.		—	3.5
2.	(a)	—	2.0
	(b)	—	2.0
3.		—	2.0
4.	(a)	—	2.0
	(b)	—	2.0
5.		—	2.0
6.	(a)	—	1.5
	(b)	—	2.0
	(c)	—	1.0