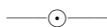


Exame Época de Recurso



1. Resolva o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ -x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

usando a decomposição LU com escolha parcial de pivot.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} B & d & 0 \\ d^T & 0 & 0 \\ C & f & D \end{bmatrix}$$

com $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz SPD, $d \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $f \in \mathbb{R}^m$ e $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ uma matriz estritamente diagonalmente dominante por colunas.

(a) Mostre que A é não singular.

(b) Indique como pode resolver eficientemente um sistema de equações lineares com a matriz A .

3. Mostre que

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

recorrendo à interpolação polinomial.

4. (a) Sejam $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ uma função duas vezes continuamente diferenciável em \mathbb{R}^1 e \bar{x} uma raiz simples de $f(x) = 0$. Mostre que o método de Newton tem convergência local e quadrática para \bar{x} .

(b) Mostre que a equação não linear $3x^5 - 5x^3 + 1 = 0$ tem uma e uma só raiz real negativa e efectue uma iteração do método de Newton para a determinação dessa raiz, com um ponto inicial à sua escolha.

5. Desenvolva o tema: “Métodos iterativos para a resolução de sistemas de equações lineares e mínimos quadrados lineares”.

6. (a) Mostre que se $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, então

$$|u^T v| \leq \|u\|_2 \|v\|_2$$

com igualdade se e só se $u = \alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz SPD e $y, s \in \mathbb{R}^n$ satisfazem $y^T s > 0$, então

$$B = A + \frac{yy^T}{y^T s} - \frac{Ass^T A}{s^T A s}$$

é SPD.

(c) Se $u \in \mathbb{R}^n$, indique como pode calcular eficientemente o vector Bu , usando apenas produtos escalares de vectores e produtos da matriz A por vectores.

Cotações:

- 1. — 3.5
- 2. (a) — 2.0
- (b) — 2.0
- 3. — 2.0
- 4. (a) — 2.0
- (b) — 2.0
- 5. — 2.0
- 6. (a) — 1.5
- (b) — 2.0
- (c) — 1.0