**Observação:** A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. (a) Seja $S_N \in \mathbb{C}^{N\times N}$ a matriz $[\omega^{j\times k}]_{j,k=0}^{N-1}$, em que $\omega = e^{2\pi i/N}$ é a raiz primitiva da unidade de ordem $N$. Mostre que $S_N$ é invertível e que a sua inversa é $\overline{S_N}/N$.

   (b) Calcule a transformada de Fourier discreta de $y = (-1,-1,1,1)$, $(N=4)$.

2. Considere o problema de condição inicial

$$\left\{\begin{array}{rcll} u' & = & f(t,u), & t\in(t_0,T)\subset \mathbb{R}, \\ u(t_0) & = & u_0, & \end{array}\right. \tag{1}$$

   onde $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua na variável $t$ e lipschitziana na variável $u$, e $u_i$ a solução aproximada obtida pelo método dos trapézios $(u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(f(t_i,u_i) + f(t_{i+1},u_{i+1})))$.

   (a) Supondo $f(t,u)=\lambda u$ e $|\lambda\frac{h}{2}|<1$, mostre que $u_i = u_0\left(\dfrac{1+\lambda\frac{h}{2}}{1-\lambda\frac{h}{2}}\right)^i$ e, consequentemente, que $\lim\limits_{h\to 0} u_i = u_0 e^{\lambda(t_i-t_0)}$.

   (b) Prove que se $u\in C^3(\Omega)$ e $\|u^{(3)}\|\le M$ então $\|u(t_i)-u_i\| \le \dfrac{h^2M}{12L}\left(e^{L(t_i-t_0)}-1\right)$, sendo $L$ a constante de Lipschitz de $f$.

3. Considere o problema de condição inicial (1) e o método dos trapézios modificado

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(f(t_i,u_i)+f(t_{i+1},u_{i+1})) + \frac{h^2}{12}(f'(t_i,u_i) - f'(t_{i+1},u_{i+1})).$$

   (a) Mostre que o método tem ordem quatro.

   (b) Mostre que a região de estabilidade absoluta contém todo o semi-eixo real negativo do plano complexo.

   (c) Considerando $f(t,u) = -90u$, $t_0 = 0$ e $u_0 = 1$, determine uma solução aproximada para $u(1)$ usando $(h=0.5)$: i. o método dos trapézios modificado; ii. o método dos trapézios modificado como corrector e o método de Euler como preditor. Compare e justifique os resultados obtidos.

4. (a) Recorrendo à formulação fraca simétrica para o problema

$$-u'' + (1+x)u = 0, \qquad \Omega = (0,1), \qquad u(0) = u'(1) = 0,$$

   obtenha a solução aproximada de $u_2 \in \mathcal{P}_2(\Omega)$. Compare $u'(1)$ e $u_2'(1)$.

   *Sugestão:* Use como funções tentativa-teste os polinómios $\psi_i(x) = x^i(1-x)$, $i=1,2$.

   (b) Obtenha a formulação variacional do problema anterior.