Departamento de Matemática da FCTUC

Exame de Recurso de Análise Numérica II

17 de Fevereiro de 2000 Duração

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Sejam dados os pontos (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, N$, que pretendemos aproximar pelo método dos mínimos quadrados. Tem-se argumentado que, em certas circunstâncias, se deve minimizar a soma dos quadrados das distâncias a uma recta $y = mx+b$, em vez da soma dos quadrados das distâncias verticais.

   (a) Mostre que, para tal, há que minimizar $S(m,b) = \dfrac{1}{1+m^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - mx_i - b)^2$.

   (b) Determine as equações normais.

2. Considere o problema de condição inicial

$$\left\{\begin{array}{rcll} u' & = & f(t,u), & t \in (t_0, T) \subset \mathbb{R}, \\ u(t_0) & = & u_0, & \end{array}\right. \tag{1}$$

   e o método linear de passo múltiplo $u_{i+2} + \alpha_1 u_{i+1} + \alpha_0 u_i = h\beta_2 f(t_{i+2}, u_{i+2})$.

   (a) Determine α_0, α_1 e β_2 por forma a que o método tenha ordem máxima.

   (b) Mostre que o método deduzido na alínea anterior é convergente.

   (c) Considere $f(t,u) = -3u + 99e^{-t}$, $t_0 = 0$, $T = 1$ e $u_0 = 0$.

      i. Mostre que o problema (1) é bem posto.

      ii. Determine uma aproximação para $u(1)$ usando o método linear de passo múltiplo dado, com $h = 0.5$.

3. Considere método de Runge-Kutta explícito dado pelo quadro de Bucher $\begin{array}{|c} A \\ \hline b^T \end{array}$.

   (a) Mostre que a sua região de estabilidade absoluta é $\{z \in \mathbb{C} : |\mathcal{R}(z)| \leq 1\}$, com $\mathcal{R}(z) = \det(I - zA + zeb^T)$, onde $e = (1, \ldots, 1)^T$ e I é a matriz identidade.

   (b) Determine o intervalo de estabilidade absoluta do método de Runge-Kutta

$$u_{i+1} = u_i + hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, u_i + \frac{1}{2}hf(t_i, u_i)\right).$$

4. (a) Recorrendo à formulação fraca simétrica para o problema

$$-u'' + (1+x)u = x, \qquad \Omega = (0,1), \qquad u(0) = u'(1) = 0,$$

   obtenha o sistema linear que permita determinar a solução aproximada do problema no espaço gerado pelas funções teste $\psi_i \in \mathcal{P}_2(\Omega)$, $i = 1, 2$, escolhidas da forma que ache mais conveniente.

   (b) Obtenha a formulação variacional do problema anterior.