DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA FCTUC

EXAME DE RECURSO DE ANÁLISE NUMÉRICA II

30 DE JANEIRO DE 2001 — DURAÇÃO: 3 HORAS

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Seja $u \in C(\Omega)$ e u_n a sua melhor aproximação no subespaço $\mathcal{P}_n(\Omega)$ dos polinómios de grau menor ou igual a n definidos em $\Omega = [-1, 1]$, relativamente ao produto interno $(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx$, com $w(x) > 0$ em Ω.
   (a) Considerando $\{\phi_0, ...\phi_n\}$ uma base de $\mathcal{P}_n(\Omega)$, deduza o sistema de equações normais que lhe permite obter os coeficientes de u_n nessa base.
   (b) Mostre que a matriz do sistema estabelecido na alínea anterior é simétrica e não singular.
   (c) Deduza uma fórmula de recorrência para os polinómios de Chebyshev definidos por $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $n \geq 0$. Refira-se depois às propriedades e interesse de tais polinómios no âmbito da teoria da aproximação.

2. Considere o método de Heun dado pelo quadro de Bucher
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}.$$
   (a) Determine a sua ordem de convergência.
   (b) Determine o seu intervalo de estabilidade absoluta.
   (c) Diga em que medida o resultado da alínea anterior pode condicionar a eficácia do método de Heun quando aplicado a problemas "stiff". Exemplifique com o problema de condição inicial $u' = -100u$, $u(0) = 1$.

3. Considere o seguinte problema valores de fronteira (com derivadas parciais):
$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0,1), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \\ u(x,0) = x. & \end{cases}$$
   (a) Obtenha um sistema diferencial ordinário usando, na discretização das derivadas espaciais, diferenças finitas centradas de segunda ordem com uma malha uniforme (3 pontos).
   (b) Resolva o sistema diferencial obtido usando o método de Adams-Bashforth de 2 passos
$$u_{i+2} = u_{i+1} + \frac{h}{2}(3f(t_{i+1}, u_{i+1}) - f(t_i, u_i)),$$
   com $h = 0.5$ (calcule as primeiras aproximações pelo método de Heun).

4. Considere o problema
$$-u'' + (2 - \sin x)u = x^2, \qquad x \in \Omega = (0,1), \qquad u(0) = u'(1) = 0.$$
   (a) Obtenha, justificando convenientemente, a sua formulação fraca simétrica.
   (b) Mostre que a forma bilinear obtida na alínea (a) é limitada.
   (c) Deduza o sistema linear que permite determinar a solução aproximada do problema no espaço gerado pelas funções teste $\psi_i \in \mathcal{P}_2(\Omega)$, $i = 1, 2$, escolhidas da forma que ache mais conveniente.