DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA FCTUC

EXAME DE ANÁLISE NUMÉRICA II

6 DE FEVEREIRO DE 2003 DURAÇÃO: 3 HORAS

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. O polinómio de Chebyshev de grau n na variável x, com $x \in [-1,1]$, pode ser obtido a partir de $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.
   (a) Efectuando a mudança de variável $x = \cos\theta$, prove que, considerando a função peso $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, se verifica $(T_0, T_0) = \pi$ e, para os restantes casos, $(T_i, T_j) = \frac{\pi}{2}\delta_{ij}$, com δ_{ij} o símbolo de Kronecker.
   (b) Demonstre que $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$.
   (c) Determine a recta r que minimiza $\int_{-1}^{1} 1/\sqrt{1-x^2}(\sin(x) - r(x))^2\,dx$.

2. Considere método de Runge-Kutta implícito dado pelo quadro de Bucher $\begin{array}{|c} A \\ \hline b^T \end{array}$.
   (a) Mostre que a sua região de estabilidade absoluta é $\{z \in \mathbb{C} : |\mathcal{R}(z)| \leq 1\}$, com $\mathcal{R}(z) = \dfrac{\det(I - zA + zeb^T)}{\det(I - zA)}$, onde $e = (1, \ldots, 1)^T$ e I é a matriz identidade.
   (b) Escreva o seguinte método
   $$u_{i+2/3} = u_i + \frac{h}{3}(f(u_{i+2/3}) + f(u_i)), \quad u_{i+1} = u_i + \frac{h}{4}(3f(u_{i+2/3}) + f(u_i)),$$
   como um método de Runge-Kutta e mostre que não é estável A.

3. Consideremos um pêndulo simples constituído por uma bola uniforme de massa m e uma barra fina de comprimento l e massa negligenciável. Se considerarmos que a resistência do ar é porpocional ao quadrado da velocidade angular do pêndulo, a equação do movimeto é dada por
   $$\theta'' + 2k\,(\theta')^2 = -\frac{g}{l}\sin\theta,$$
   sendo θ o ângulo agudo que a barra do pêndulo faz com a vertical. Considerando que em $t = 0$ se tem $\theta = \frac{\pi}{3}$ determine o valor de θ e de θ' nos instantes (em minutos) $t_i = ih$, com $h = 0.05$ e $i = 0, 1, 2$, usando o método dado no exercício anterior (considere $l = g$ cm e $k = 1$).

4. Estude, em função de $\alpha \in \mathbb{R}$, a estabilidade-zero e a ordem da família de métodos lineares de passo múltiplo $u_{i+2} = \alpha u_{i+1} + (1-\alpha)u_i + 2hf_{i+1} + \frac{h\alpha}{2}(f_i - 3f_{i+1})$.

5. (a) Obtenha a formulação fraca simétrica para o problema
   $$u'' - u = \sin x, \qquad \Omega = (0,1), \qquad u'(0) = u'(1) = 0.$$
   (b) Mostre que a forma bilinear obtida na alínea (a) é limitada e, atendendo à desigualdade de Friedrichs (para $v \in H^1(\Omega)$, $\|v\|_0^2 \leq c\|v'\|_0^2$.), coerciva.
   (c) Formule o problema de Galerkin num espaço de funções polinomiais de dimensão dois, indicando funções de base que lhe pareçam adequadas.
   (d) Diga, justificando convenientemente, se o problema de Galerkin dado na alínea anterior tem solução única.