Departamento de Matemática da FCTUC

Exame de Recurso de Análise Numérica II

21 de Fevereiro de 2003 Duração: 3 horas

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. (a) Determine a série de Fourier para a extensão periódica da função $u(x) = |x|$, com $x \in (-\pi, \pi)$ (função "onda triangular"), indicando qual o valor da série em $x = \pi$?
   (b) i. Seja $S_N \in \mathbb{C}^{N\times N}$ a matriz $[\omega^{j\times k}]_{j,k=0}^{N-1}$, em que $\omega = e^{2\pi i/N}$ é a raiz primitiva da unidade de ordem N. Mostre que S_N é invertível e que a sua inversa é $\overline{S_N}/N$.
   ii. Calcule a transformada de Fourier discreta, com $N = 4$ pontos, correspondente à função "onda triangular".

2. Considerer preditor-corrector de Euler-Trapézios

$$\text{Preditor:} \qquad u_{i+1} = u_i + hf_i, \quad \text{[Euler]};$$

$$\text{Corrector:} \qquad u_{i+1} - u_i = \tfrac{h}{2}(f_{i+1} + f_i), \quad \text{[Trapézios]},$$

usado com um algoritmo PECE.

   (a) Mostre que se este método é equivalente a um método de Runge-Kutta explícito.
   (b) Determine a sua ordem de consistência.
   (c) Determine o seu intervalo de estabilidade absoluta.
   (d) Aplique o método à resolução de $\left\{\begin{array}{rcll} u' &=& -10u, & t \in (0,T) \subset \mathbb{R}, \\ u(0) &=& 1, & \end{array}\right.$ escolhendo a medida do passo h de forma conveniente e $T = 2h$.

3. Construa uma família de métodos lineares de dois passo, com um parâmetro livre, implícita, de ordem máxima e determine a sua constante erro. Para que valores do parâmetro o método converge?

4. Considere o problema de condições de fronteira

$$\left\{\begin{array}{l} u'' + Au' = 0, \quad x \in [0,1], \quad A \in \mathbb{R}, \\ \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \end{array}\right.$$

   (a) Mostre que, para $h = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, ..., n$, se tem

$$u''(x_i) = \frac{1}{h^2}\left[u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})\right] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_{i-1}, x_{i+1}),$$

   e

$$u'(x_i) = \frac{1}{2h}\left[u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})\right] - \frac{h^2}{6} u'''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x_{i-1}, x_{i+1}).$$

   (b) Determine o sistema algébrico que lhe permite obter a solução aproximada do problema usando diferenças centradas de segunda ordem.
   (c) Sabendo que a solução exacta do sistema algébrico obtido é

$$u_i = \frac{1 - R^i}{1 - R^{n+1}}, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \text{onde} \qquad R = \frac{1+P}{1-P}, \quad P = \frac{Ah}{2}$$

   e h a medida a amplitude da partição uniforme considerada na alínea anterior, que condições deverá impôr a h por forma a evitar oscilações na solução aproximada.