Departamento de Matemática da FCTUC

Primeira frequência de Análise Numérica II

18 de Novembro de 2002 Duração: 1h30m

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. (a) Seja $u \in C[a,b]$ e $\mathcal{S}_2$ o espaço gerado pelas funções linearmente independentes ϕ_1 e ϕ_2, definidas em $[a,b]$. Mostre que $u_2 - u$ é ortogonal a $\mathcal{S}_2$, sendo u_2 a melhor aproximação a u em $\mathcal{S}_2$.

   (b) Determine a função da forma $u_2(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ que minimiza $\int_{-1}^{1} (x - u_2(x))^2 dx$.

2. Considere o problema de condição inicial

$$\begin{cases} u' &= f(t,u), \qquad t \in (0,1), \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \tag{1}$$

onde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua na variável t e lipschitziana na variável u, e o Lema de Gronwall:

"Seja $\{z_n\}_{n=0}^{N}$ uma sucessão de números positivos tais que $z_{n+1} \leq C z_n + D$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, com C e D constantes e $C > 0$. Então, para todo o $n = 0, \ldots, N$,

$$z_n \leq \frac{D}{1-C}(1 - C^n) + z_0 C^n, \quad C \neq 1, \qquad \text{e} \qquad z_n \leq nD + z_0, \quad C = 1."$$

   (a) Prove que se $u \in C^2(\Omega)$ e $\|u^{(2)}\|$ for limitada então o método de Euler

$$u_{i+1} = u_i + h f(t_i, u_i)$$

   é convergente e

$$\|u(t_i) - u_i\| \leq \frac{\|T_h\|}{L}\left(e^{L(t_i - t_0)} - 1\right),$$

   sendo L a constante de Lipschitz de f e T_h o erro de truncatura do método.

   (b) Considerando $f(t,u) = -30u$ e $u_0 = 1$, determine a medida do passo a usar no método de Euler por forma a que o erro obtido na aproximação de $u(1)$ seja inferior a 10^{-3}. Será que, para essa medida do passo, o método de Euler é absolutamente estável?

3. O modelo matemático para um dado circuito eléctrico é dado pela equação

$$0.5Q'' + 6Q' + 50Q = 24\sin(10t),$$

com $Q(0) = 0$ e $I(0) = Q'(0) = 0$. Determine o valor da carga Q e da intensidade I no instante $t = 1$ usando o método de Heun $\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$ com $h = 0.5$.