MATEMÁTICA NUMÉRICA II – Exame – 12/01/05

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h15m

Atenção: Justifique todas as suas respostas. Podem consultar-se os apontamentos das aulas, bem como os enunciados e as respostas dos exercícios das aulas e dos trabalhos.

---

1. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável e com matriz Jacobiana não singular em $\mathbb{R}^n$.

   Considere o sistema de equações não lineares

   $$F(x) \;=\; 0$$

   e o problema de mínimos quadrados

   $$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|F(x)\|^2.$$

   (a) Escreva a direcção de descida máxima para o problema de mínimos quadrados.

   (b) Qualquer ponto estacionário deste problema de optimização é solução do sistema. Porquê?

   (c) Prove que o passo de Newton para o sistema de equações não lineares é uma direcção de descida para o problema de mínimos quadrados (se $F(x) \neq 0$).

   (d) Mostre que o método de Newton para o sistema de equações não lineares coincide com o método de Gauss–Newton para o problema de mínimos quadrados.

2. Considere uma fórmula de quadratura interpolatória, para aproximação do integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, da forma

   $$I_1(f) \;=\; \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(\sqrt{3}/3).$$

   (a) Para que valores de α_0, α_1 e x_0 atinge esta fórmula o seu grau de exactidão máximo? (No caso de α_0 e α_1 só precisa de indicar as suas expressões.)

   (b) Considere $\alpha_1 = 0$. Para que valores de α_0 e x_0 atinge a fórmula $I_0(f) = \alpha_0 f(x_0)$ o seu grau de exactidão máximo?

   (c) Classifique as fórmulas que encontrou nas duas alíneas anteriores.

3. Dada uma função f, contínua em $[0,1]$, considere o seguinte problema de condições de fronteira periódicas:

$$\text{encontrar} \quad u \in C^2[0,1] \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{se } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1), & u'(0) = u'(1). \end{cases}$$

Considere o intervalo $[0,1]$ discretizado na forma

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} = 1.$$

Seja u_k uma aproximação para $u(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Faça $h = 1/(n-1)$.

(a) Com k a variar de 0 até $n-1$, escreva uma aproximação para $u''(x_k)$ recorrendo à fórmula das diferenças centrais de segunda ordem. Tome o simétrico desta aproximação e faça-o igual a $f(x_k)$. Reúna todas estas igualdades num sistema de equações lineares e escreva-o na sua forma matricial, fazendo $u_{-1} = u_{n-1}$ e $u_n = u_0$. O resultado é o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-3} \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f(0) \\ f(h) \\ f(2h) \\ \vdots \\ f((n-3)h) \\ f((n-2)h) \\ f(1) \end{bmatrix}.$$

(b) Mostre que a matriz deste sistema é circulante. Escreva os seus valores próprios no caso $n = 3$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Como resolveria este sistema de forma eficiente?

4. Considere o problema de valor inicial definido por

$$\begin{aligned} y' &= t^3 y^2, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

(a) Justifique o motivo pelo qual este problema tem uma e uma só solução no rectângulo $[-1,1] \times [-1,1]$.

(b) Enuncie os passos do método de Taylor de ordem 2 para este problema (como foi feito na aula para um outro problema e uma outra ordem).

(c) Escreva a fórmula de actualização do método na forma $u_{k+1} = u_k + h\Phi(t_k, u_k, f(t_k, u_k); h)$, identificando a sua função incremental.

(d) Prove que o erro de truncatura local deste método obedece a

$$\left| \frac{R_{k+1}(h)}{h} \right| \leq Ch^2,$$

em que C é uma constante positiva independente de h ou de n_h.

Resolução do Exame da Época Normal (12/01/2005) de Matemática Numérica II

1. Seja $J(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a matriz Jacobiana de F em $x \in \mathbb{R}^n$.

   (a) **(1.0)** $-J(x)^\top F(x)$.

   (b) **(1.0)** Tem-se que $-J(x)^\top F(x) = 0$ é equivalente a $F(x) = 0$, porque $J(x)$ é não singular. Logo, os pontos estacionários do problema de mínimos quadrados coincidem com as soluções do sistema de equações não lineares.

   (c) **(1.0)**

   $$\left(-J(x)^{-1}F(x)\right)^\top \left(-J(x)^\top F(x)\right) = F(x)^\top J(x)^{-\top} J(x)^\top F(x) = \|F(x)\|^2 \ > \ 0.$$

   A conclusão resulta, directamente, da aplicação da Proposição 2 da Aula 6.

   (d) **(1.0)**

   $$-\left(J(x)^\top J(x)\right)^{-1} J(x)^\top F(x) \ = \ -J(x)^{-1} J(x)^{-\top} J(x)^\top F(x) \ = \ -J(x)^{-1}F(x).$$

2. A procura de fórmulas de quadratura com grau de exactidão máximo, leva-nos a considerar as fórmulas de quadratura Gaussiana.

   O facto de $a = -1$, $b = 1$ e $w(x) = 1$, sugere a utilização dos polinómios de Legendre.

   (a) **(2.0)** Como $\sqrt{3}/3$ é uma das raízes do polinómio de Legendre de grau 2 (Aulas 14 e 15), vamos escolher x_0 como sendo a outra raiz ($-\sqrt{3}/3$). O grau de exactidão torna-se, assim, máximo e igual a $2n + 1 = 3$. Como as fórmulas de quadratura Gaussiana são interpolatórias vem que

   $$\alpha_0 \ = \ \int_{-1}^{1} \ell_0(x)\,dx \quad \text{e} \quad \alpha_1 \ = \ \int_{-1}^{1} \ell_1(x)\,dx$$

   (com $x_0 = -\sqrt{3}/3$ e $x_1 = \sqrt{3}/3$ e ℓ_0 e ℓ_1 os polinómios de Lagrange de grau 2 com base nestes dois pontos). Não era preciso efectuar as contas...

   (b) **(1.0)** A resposta é $x_0 = 0$, que é a raiz do polinómio de Legendre de grau 1. O valor de α_0 seria dado por $\int_{-1}^{1} \ell_0(x)\,dx$, para que a formúla de quadratura Gaussina seja, de facto, interpolatória. O grau de exactidão torna-se, assim, máximo e igual a $2n + 1 = 1$. Nesta alínea, ℓ_0 é o polinómio de Lagrange de grau 1 com base neste ponto.

   (c) **(1.0)** Ambas são fórmulas de quadratura Gaussiana, logo interpolatórias (já visto). A da alínea (b) é de Newton-Cotes e aberta ($h = 1$ e $x_0 = 0$).

3. (a) **(2.5)** A aproximação para $u''(x_k)$ é dada por

$$\frac{u(x_{k-1}) - 2u(x_k) + u(x_{k+1})}{h^2}.$$

Deste modo, e de acordo com o que foi feito para o caso não periódico, vem que

$$\begin{aligned} u_{-1} - 2u_0 + u_1 &= h^2 f(0), \\ u_0 - 2u_1 + u_2 &= h^2 f(x_1), \\ \vdots &= \vdots \\ u_{n-3} - 2u_{n-2} + u_{n-1} &= h^2 f(x_{n-2}), \\ u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n &= h^2 f(1). \end{aligned}$$

Fazendo $u_{-1} = u_{n-1}$ e $u_n = u_0$, obtém-se o sistema pretendido.

(b) **(2.0)** A matriz é circulante porque se escreve na forma

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix},$$

com $h_0 = 2$, $h_1 = -1$ e $h_2 = -1$. Os valores próprios são $h_0 + h_1 + h_2 = 0$, $h_0 + h_1 w + h_2 w^2 = 2 - w - w^2$ e $h_0 + h_1 w^2 + h_2 w^4 = 2 - w^2 - w$ (ver Trabalho 3), com $w = e^{-i2\pi/3}$.

(c) **(1.5) (Única pergunta "difícil".)** Seja H uma matriz circulante. Então $H = F^{-1}\Lambda F$, em que Λ é diagonal e F é a matriz da transformada discreta de Fourier (ver Trabalho 3 da Disciplina). Assim sendo, $Hu = f$ é equivalente a $u = F^{-1}\Lambda^{-1}Ff$. Mas $F^{-1} = \bar{F}/N$, com $N = 3$ neste caso. Logo, $u = \bar{F}\left(\Lambda^{-1}(Ff)\right)/N$, o que envolveria duas FFTs (de ordem N) e $2N$ divisões.

4. (a) **(1.0)** Este problema tem uma e uma só solução no rectângulo $[-1,1] \times [-1,1]$ porque, num (qualquer) conjunto aberto contendo este rectângulo, as funções $f(t,y) = t^3y^2$ e $\partial f/\partial y(t,y) = 2t^3y$ são contínuas (Teorema 2, Aula 23).

(b) **(2.0)** Note que $y'' = 3t^2y^2 + 2t^3yy'$ (os argumentos foram omitidos). Passos do método de Taylor de ordem 2: Escolher T e h (e determinar n_h). Fazer $u_0 = y_0 = 0$ e $t_0 = 0$. Para $k = 0, 1, \ldots, n_h - 1$ fazer (1) $u'_k = t_k^3 u_k^2$, (2) $u''_k = 3t_k^2u_k^2 + 2t^3u_ku'_k$, (3) $u_{k+1} = u_k + h(u'_k + hu''_k/2)$ e (4) $t_{k+1} = t_k + h$.

(c) **(1.0)** $\Phi(t_k, u_k, f(t_k, u_k); h) = t_k^3u_k^2 + h(3t_k^2u_k^2 + 2t_k^6u_k^3)/2$.

(d) **(2.0)** $R_{k+1}(h) = h^3y^{(3)}(t_k + \sigma_k h)/6$. Assim sendo, $C = |\max_{t\in I} y^{(3)}(t)|/6$. O intervalo I poderia ser $[0,1]$ se $T = 1$.