Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Numérica II

Exame (2007/08)

16 de Junho de 2008 Duração: 2h30m

Nota: Justifique todas as suas respostas. Podem consultar-se os Apontamentos de Matemática Numérica II de 2007/2008 (com anotações feitas na aula).

1. Sejam x_* um ponto de $\mathbb{R}^n$ e F uma função de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$ tais que a matriz Jacobiana de F é não singular em x_* e é contínua à Lipschitz num aberto contendo x_*.
   Seja $\{x_k\}$ uma sucessão de $\mathbb{R}^n$ a convergir para x_*, gerada da seguinte forma:

$$x_{k+1} \;=\; x_k + s_k \qquad \text{com} \qquad J(x_k)s_k = -F(x_k) + r_k\,,$$

   em que r_k é um vector não nulo de $\mathbb{R}^n$ e $s_k \neq 0$ para todo o k.

   (a) Prove que s_k satisfaz:

$$A_k s_k \;=\; -F(x_k) \quad \text{em que} \quad A_k \;=\; J(x_k) - \frac{r_k s_k^\top}{s_k^\top s_k}.$$

   (b) Recorrendo à expressão da alínea anterior e a um resultado dado nas aulas, mostre que, sob determinadas condições, $\{x_k\}$ converge q-superlinearmente para x_* se e só se

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\|r_k\|}{\|s_k\|} \;=\; 0\,.$$

2. Considere a função real de n variáveis reais definida por

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|x\|^2,$$

   em que $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

   (a) Escreva o gradiente e a Hessiana de f em x.

   (b) Para que valores de α é a matriz Hessiana definida positiva?

   (c) Seja $\alpha > 0$. Determine o único minimizante de f.

   (d) No contexto da alínea anterior, quantas iterações levaria o método de Newton a convergir para esse minimizante?

3. O polinómio de Chebyshev de grau n na variável x, com $x \in [-1, 1]$, pode ser obtido a partir de $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

   (a) Prove que $T_n(x)$ atinge os valores $+1$ e -1, alternadamente, nos pontos

   $$x'_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

   (b) Mostre que o polinómio mónico de Chebyshev de grau n é, de todos os polinómios mónicos de grau n em $[-1, 1]$, o que tem menor norma.

   (c) Determine a recta r que minimiza $\int_{-1}^{1} 1/\sqrt{1-x^2}(\sin(x) - r(x))^2\, dx$.

4. Considere o problema

   $$-u'' + (2 - \sin x)u = x^2, \qquad x \in \Omega =]0, 1[, \qquad u(0) = u'(1) = 0.$$

   Obtenha, justificando convenientemente, a sua formulação variacional e deduza o sistema linear que permite determinar a solução de Galerkin no espaço gerado pelas funções teste $\psi_i \in \mathcal{P}_2(\Omega)$, $i = 1, 2$, escolhidas da forma que ache mais conveniente.

5. Considere o método–θ definido por

   $$u_{k+1} = u_k + h((1-\theta)f(t_k, u_k) + \theta f(t_{k+1}, u_{k+1})), \quad u_0 = y_0, \quad k = 0, 1, ...,$$

   com $\theta \in [0, 1]$, aplicado à resolução numérica do problema de condição inicial

   $$y' = f(t, y(t)), \qquad t \in]t_0, t_0 + T], \qquad y(t_0) = y_0.$$

   (a) Determine, em função de θ, a ordem do método.

   (b) Mostre que o método é $\mathcal{A}$–estável se e só se $\theta \geq 1/2$.