Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Numérica II

Trabalho 2 (2007/08)

Data de recepção: **11/03/2008** Data de entrega: **25/03/2008**

1. Considere a seguinte função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:
$$f(x) \;=\; x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_2^4 + (x_2 + x_3)^2$$
Efectue duas iterações do Método de BFGS para aproximar um mínimo local de f a partir de $x^{(0)} = (-1, 1, 1)$ e $x^{(1)} = x^{(0)} - \nabla^2 f(x^{(0)})^{-1} \nabla f(x^{(0)})$.

2. Nas condições do Teorema 2, prove que
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\|\,(A_k - J(x_k))\,s_k\|}{\|s_k\|} \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{k\to+\infty} \frac{\|s_k - p_k\|}{\|s_k\|} \;=\; 0.$$

3. Este exercício é para ser resolvido em Matlab. As duas primeiras alíneas deverão ser justificadas matematicamente.

   (a) Escreva uma função que, dada a matriz H simétrica, devolva uma matriz simétrica E para a qual o menor valor próprio de $H + E$ não seja inferior a 10^{-4}.

   (b) Escreva uma função que, dada a matriz H simétrica, devolva uma matriz simétrica E para a qual $H + E$ seja definida positiva (sem recorrer ao cálculo de valores próprios de H).

   (c) Explique qual seria a utilidade destes procedimentos numa implementação do método de Newton modificado para optimização sem restrições.

4. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável e com matriz Jacobiana não singular em $\mathbb{R}^n$. Considere o sistema de equações não lineares
$$F(x) \;=\; 0$$
e o problema de mínimos quadrados
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|F(x)\|^2.$$

   (a) Escreva a direcção de descida máxima para o problema de mínimos quadrados.

   (b) Qualquer ponto estacionário deste problema de optimização é solução do sistema. Porquê?

   (c) Prove que o passo de Newton para o sistema de equações não lineares é uma direcção de descida para o problema de mínimos quadrados (se $F(x) \neq 0$).

   (d) Mostre que o método de Newton para o sistema de equações não lineares coincide com o método de Gauss–Newton para o problema de mínimos quadrados.