Departamento de Matemática da FCTUC

Licenciatura e Menor em Matemática

Matemática Numérica II

15 de Junho de 2009 Exame Normal **2h30m**

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Suponhamos que queremos determinar o mínimo da função $F(x,y) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 2x + (y-1)^2$. Justifique porque não devemos utilizar o método de Newton para optimização.

$$\text{Método de Newton :} \quad \nabla^2 F(x_k)p_k = -\nabla F(x_k), \qquad x_{k+1} = x_k + p_k.$$

2. Considere a seguinte modificação do método de Newton para optimização: em cada iteração a matriz Hessiana $H_k = \nabla^2 f(x_k)$ é substituída por $H_k = QDQ^T$ onde D é a matriz diagonal contendo os valores próprios de H_k, e Q é a matriz cujas colunas são os vectores próprios e é tal que $Q^TQ = QQ^T = I$. Dado um parâmetro $\nu > 0$, construa a matriz diagonal modificada $\tilde{D}$ da seguinte forma: se $d_{jj} \geq \nu$, então $\tilde{d}_{jj} = d_{jj}$, mas se $d_{jj} < \nu$, então $\tilde{d}_{jj} = 1$. Seja agora $\tilde{H}_k = Q\tilde{D}Q^T$, e escolhamos a direcção $d_k = -[\tilde{H}_k]^{-1}\nabla f(x_k)$.

   Mostre que d_k é uma direcção de descida mesmo que H_k não seja definida positiva.

3. Mostre que para uma função $f(x)$ infinitamente diferenciável, temos

$$f''(x) = \frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2} + R(h)$$

   para $h > 0$ e com $|R(h)| \leq Ch^4$, onde C é uma constante independente de h.

4. Suponha que o cálculo do integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

   é feito através da fórmula de quadratura

$$I_2(f) = A_0 f(-1/2) + A_1 f(0) + A_2 f(1/2).$$

   Determine A_0, A_1 e A_2 de forma a obtermos uma fórmula de quadratura que tenha grau de exactidão não inferior a 2.

5. Considere os polinómios $\phi_0 = 1$ e $\phi_1 = x - \frac{1}{2}$ e o produto interno

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

   (a) Prove que ϕ_0 e ϕ_1 são ortogonais.

   (b) Determine um polinomio ϕ_2 de grau 2, ortogonal a ϕ_0 e ϕ_1.

   (c) Determine o polinómio p de grau r, com $r \leq 2$ que é solução do seguinte problema

$$\min_{q \in \mathcal{P}_2} ||e^x - q||,$$

   onde a norma é definida por $||g|| =< g, g >^{1/2}$.

6. Dada uma função f, contínua em $[0,1]$, considere o problema de condições de fronteira:

$$\text{determinar} \quad u \in C^2[0,1] : \quad \begin{cases} -\alpha u''(x) + \gamma u(x) = f(x), & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

onde $\alpha, \gamma > 0$.

(a) Escreva a formulação variacional do problema da forma

$$\text{determinar} \quad u \in V : \quad a(u,v) = < f, v >, \quad \forall v \in V$$

(b) Considere o método de Galerkin

$$\text{determinar} \quad u_h \in V_h : \quad a(u_h, v_h) = < f, v_h >, \quad \forall v_h \in V_h$$

e seja $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ uma base de V_h. Prove que o método de Galerkin é equivalente a um sistema de N equações com N incógnitas.

(c) Escreva o sistema na forma

$$A_G \mathbf{u} = \mathbf{f}_G$$

e prove que a matriz A_G é definida positiva.