Departamento de Matemática da FCTUC
Licenciatura e Menor em Matemática
Matemática Numérica II

4 de Junho de 2009 Frequência **2h00m**

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere as seguintes equações não lineares

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2-1=0 \\ f_2(x,y,z) &= 2x^2+y^2-4z=0 \\ f_3(x,y,z) &= 3x^2-4y+z^2=0 \end{aligned}$$

(a) Determine um conjunto da forma $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$, onde se encontra a solução do sistema que está no conjunto $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$.

(b) Escolha uma estimativa inicial x_0 adequada.

(c) Determine a primeira iteração do método de Newton,

$$J(x_k)p_k = -F(x_k), \qquad x_{k+1}=x_k+p_k.$$

2. Considere a seguinte modificação do método de Newton para optimização: em cada iteração a matriz Hessiana $H_k=\nabla^2 f(x_k)$ é substituída por $H_k=QDQ^T$ onde D é a matriz diagonal contendo os valores próprios de H_k, e Q é a matriz cujas colunas são os vectores próprios e é tal que $Q^TQ=QQ^T=I$. Dado um parâmetro $\nu>0$, construa a matriz diagonal modificada $\tilde{D}$ da seguinte forma: se $d_{jj}\geq\nu$, então $\tilde{d}_{jj}=d_{jj}$, mas se $d_{jj}<\nu$, então $\tilde{d}_{jj}=1$. Seja agora $\tilde{H}_k=Q\tilde{D}Q^T$, e escolhamos a direcção $d_k=-[\tilde{H}_k]^{-1}\nabla f(x_k)$.

Mostre que d_k é uma direcção de descida mesmo que H_k não seja definida positiva.

3. (a) Sabendo que o erro da fórmula de Simpson simples, para aproximar $I(f)=\int_a^b f(x)dx$, é dado por

$$E_2(f) = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi),\ a<\xi<b \quad \text{onde} \quad h=(b-a)/2,$$

prove que o erro da fórmula de Simpson composta, aplicada a $2N$ subintervalos, verifica

$$|E_{2,2N}(f)| = \frac{h^4}{180}(b-a)|f^{(4)}(\eta)|,\ a<\eta<b \quad \text{onde} \quad h=(b-a)/2N.$$

(b) Considere o integral $I=\int_0^1 e^x(\frac{11}{2}-x)dx$. Determine um limite superior para o erro cometido, quando usamos a fórmula de Simpson composta para aproximar I, com 6 subintervalos.

(c) Sabendo que a fórmula simples de Simpson para aproximar I, em que são utilizados dois subintervalos de tamanho h, nomeadamente $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, é dada por

$$S=\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]$$

indique a expressão que permite calcular o valor aproximado do integral I da alínea (b) utilizando os 6 subintervalos. (Não necessita efectuar os cálculos).

4. (a) Determine três polinómios que sejam ortogonais relativamente ao produto interno

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} x^2 f(x) g(x) dx.$$

(b) Use esses polinómios para determinar o polinómio p de grau r, com $r \leq 2$ que minimiza

$$\int_{-1}^{1} x^2 \left(\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - p(x) \right)^2 dx.$$

Nota: $\int_0^1 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) x dx = \frac{4}{\pi^2}.$

5. Considere o problema de valor inicial

$$y' = te^{-5t} - 5y, \qquad y(0) = 0,$$

(a) Escreva o método de Euler explícito $u_{k+1} = u_k + hf(t_k, u_k),\ u_0 = y_0$ que pode ser usado para determinar a solução do problema no intervalo $[0, 1]$.

(b) Prove que

$$u_{k+1} = h^2 e^{-5h} \sum_{j=0}^{k-1} (j+1)(e^{-5h})^j (1-5h)^{k-1-j}.$$

(c) Determine a solução aproximada u_{k+1}, para $h = 1/5$, e calcule o erro $|y(t_k) - u_k|,\ k = 1, \ldots, 5$, sabendo que a solução do problema é $y(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-5t}$.