Departamento de Matemática da FCTUC Ano 2008/2009 Licenciatura e Menor em Matemática **Data de entrega:** Até 2 de Abril	**Matemática Numérica II** **Problema de Março**

Observação: Para a resolução dos problemas podem trabalhar em grupos de dois. Cada grupo submete apenas um trabalho com o nome completo dos dois na primeira página. No caso de a resolução do problema envolver o MATLAB todo o *input* e *output* relevante deve ser descrito. A organização e clareza das respostas também é avaliada.

1. Considere a função de Rosenbrock

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

(a) Mostre que $x_* = [1 \;\; 1]^T$ é o único minimizante local de f e que $\nabla^2 f(x_*)$ é definida positiva.

(b) Determine o minimizante de f usando o método de Newton e o método BFGS. Considere $x_0 = [-1.2 \;\; 1]^T$ e $B_0 = (\nabla^2 f(x_0))^{-1}$. Faça uma tabela com os valores $||x_k - x_*||$ até 40 iterações para os dois métodos.

Algoritmo (Método BFGS): Resolver o sistema $\nabla f(x) = 0$, dados os valores iniciais x_0, B_0, $\epsilon > 0$. Gera uma sucessão x_k que converge para x_*.

$k = 0$

while $||\nabla f(x_k)|| > \epsilon$

Determine $s_k = -B_k \nabla f(x_k)$

Faça $x_{k+1} = x_k + s_k$, $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$

Determine $B_{k+1} = (I - \rho_k s_k y_k^T) B_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T$

$k = k + 1$

end

(c) Se usarmos o método de descida mais rápida para resolver o problema da alínea anterior observa-se que são necessárias 5264 iterações para reduzir a norma do gradiente para 10^{-5}. Quantas iterações dos métodos de Newton e BFGS são necessárias para fazer o mesmo?

2. A raiz quadrada de uma matriz A é a matriz $A^{1/2}$ tal que $A^{1/2}A^{1/2} = A$. Mostre que qualquer matriz simétrica definida positiva A tem uma raiz quadrada, e que esta matriz também é simétrica definida positiva (Sugestão: Factorize $A = UDU^T$, com U ortogonal e D diagonal).

3. Considere uma matriz B positiva definida com valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ onde $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Considere a função $\psi(B) = tr(B) - \ln(\det(B))$. Mostre que $\psi(B) > 0$.