Departamento de Matemática da FCTUC
Ano 2008/2009
Licenciatura e Menor em Matemática
Data de entrega: Até 30 de Abril

Matemática Numérica II
Problema de Abril

Observação: Para a resolução dos problemas podem trabalhar em grupos de dois. Cada grupo submete apenas um trabalho com o nome completo dos dois na primeira página. No caso de a resolução do problema envolver o MATLAB todo o *input* e *output* relevante deve ser descrito. A organização e clareza das respostas também é avaliada.

1. Seja f uma função definida em $[-1,1]$ com derivadas de ordem quatro contínuas. Determine o polinómio de interpolação de Hermite de grau 3 para f usando os pontos $x_0 = -1$ e $x_1 = 1$. Prove que
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx - [f(-1)+f(1)] = \frac{1}{3}[f'(-1) - f'(1)] + E,$$
onde $|E| \leq \dfrac{2}{45} \max\limits_{x\in[-1,1]} |f^{(iv)}(x)|$.

2. Considere os polinómios de Chebyshev que podem ser escritos na forma $T_N(x) = \cos(N \arccos(x))$, $N \geq 0$, definidos em $[-1,1]$, e considere os pontos
$$x_k = \cos\left(\pi \frac{2k+1}{2N+2}\right),\ k = 0, 1, \ldots, N.$$
Determine:
(a) $\sum\limits_{k=0}^{N} T_i(x_k)T_j(x_k)$, quando $i \neq j$.
(b) $\sum\limits_{k=0}^{N} T_i(x_k)T_j(x_k)$, quando $i = j \neq 0$.
(c) $\sum\limits_{k=0}^{N} T_0(x_k)T_0(x_k)$.

3. Usando os resultados anteriores prove o seguinte teorema:
Aproximação de Chebyshev: Uma função $f(x)$ no intervalo $[-1,1]$ pode ser aproximada por um polinómio interpolador $P_N(x)$ de grau inferior ou igual a N, que interpola os pontos x_k definidos acima, e é representado por
$$P_N(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j T_j(x),$$
onde os coeficientes c_j são dados por
$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} f(x_k)T_0(x_k) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} f(x_k) \\ c_j &= \frac{2}{N+1}\sum_{k=0}^{N} f(x_k)T_j(x_k) = \frac{2}{N+1}\sum_{k=0}^{N} f(x_k)\cos\left(j\pi\frac{2k+1}{2N+2}\right),\ j = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}$$