Departamento de Matemática

Matemática Numérica Ii

Trabalho Prático nº1

Marta Sofia Pimentel Cavaleiro

Exercício 1

a) Tentou-se, usando o comando *solve* do ***Matlab***, resolver o sistema dado, tendo-se obtido o seguinte output:

```
>> [x y] = solve ('x = 8*cos(x+y)','y^3 = 12*sin(x+y)')

x =
 x
 x
 x
 x
 x
 x

y =
                                1/2*2^(1/2)*(1152-18*x^2)^(1/6)
                               -1/2*2^(1/2)*(1152-18*x^2)^(1/6)
  1/2*(-(1152-18*x^2)^(1/3)-i*3^(1/2)*(1152-18*x^2)^(1/3))^(1/2)
 -1/2*(-(1152-18*x^2)^(1/3)-i*3^(1/2)*(1152-18*x^2)^(1/3))^(1/2)
  1/2*(-(1152-18*x^2)^(1/3)+i*3^(1/2)*(1152-18*x^2)^(1/3))^(1/2)
 -1/2*(-(1152-18*x^2)^(1/3)+i*3^(1/2)*(1152-18*x^2)^(1/3))^(1/2)
```

Concluiu-se que o ***Matlab***, não conseguiu através do seu comando *solve* chegar a soluções concretas do sistema em questão.

b) Utilizou-se o programa fornecido (do enunciado) que implementa o Método de Newton, tendo como aproximação inicial o ponto $(0, 0)^T$. Obteve-se o seguinte output:

```
>> newton ('[x - 8*cos(x+y);
y^3 - 12* sin(x+y)]',
[0; 0], 9)

z =
     0
     0

iteracao:1
z =
     8
    -8

iteracao:2
z =
   8.000000000000000
  -5.155555555555556

iteracao:3
z =
   1.680929395413434
  -2.819794698152967

iteracao:4
z =
   0.935639343321569
  -2.406682511789695

iteracao:5
z =
   0.823734416754819
  -2.291381706576829

iteracao:6
z =
   0.816948179488310
  -2.285447697972302

iteracao:7
z =
   0.816930449871296
  -2.285432158718860

iteracao:8
z =
   0.816930449749988
  -2.285432158612549

iteracao:9
z =
   0.816930449749988
  -2.285432158612549


ans =
   0.816930449749988
  -2.285432158612549
```

Verificou-se que após a 9ª iteração, as casas decimais disponibilizadas das soluções permaneceram imutáveis, tendo-se verificado que a partir da 6ª iteração, as soluções se começaram a aproximar. A partir da 6ª iteração e até que as soluções das iterações coincidam, analisando os dados disponíveis, verificou-se que em cada iteração se atingem mais 5 casas decimais correctas, podendo-se assim exprimir a rapidez de convergência.

c) Fazendo uso novamente do programa do Método de Newton, tentaram-se obter aproximações para todas as soluções do sistema.

Analisando as equações do sistema em si, verificou-se que os valores possíveis de x e y são limitados. De facto,

$$\forall\, x, y \quad -8 \leq 8\cos(x+y) \leq 8 \;\Rightarrow\; -8 \leq x \leq 8$$

$$\forall\, x, y \quad -12 \leq 12\cos(x+y) \leq 12 \;\Rightarrow\; -12 \leq y^3 \leq 12 \;\Rightarrow\; -2.3 < y < 2.3$$

Sabendo isto, tentaram-se aproximações iniciais dentro do intervalo [-8, 8] x (-2.3, 2.3).

Experimentaram-se várias aproximações iniciais e escolheu-se uma para cada solução obtida. Na tabela seguinte apresentam-se os resultados:

Aproximação inicial	Solução (5 c.d.)
(0, 0)	(0.81693, -2.28543)
(-7.5, -2)	(-7.77808, -1.41061)
(-7, -2)	(-7.31253, -1.69465)
(7, -2)	(7.53256, -1.59291)
(-5, 1)	(-5.89369, 2.00949)
(0, 2)	(-0.63656, 2.28701)
(5, 2)	(5.06623, 2.10197)

Verifica-se realmente que estes pontos constituem soluções do sistema.

Obtiveram-se ainda três resultados diferentes, a partir de outras aproximações iniciais. Esses resultados estão apresentados na tabela abaixo:

Aproximação Inicial	25ª iteração	50ª iteração	75ª iteração
(-8, 0)	(6.96223, -7.08631)	(-5.94217, -28.06471)	(-1062.74739, 17.57713)
(-4, 2)	(-157.76490, -23.28657)	(-1323.40607, -14.18352)	(2239.11793, 587.96720)
(1, 2)	(24.88622, 2.07332)	(21.06280, 2.92471)	(24.84960, 2.09505)

Verifica-se imediatamente que para estas aproximações iniciais o Método de Newton não converge, e as soluções obtidas nunca poderiam ser soluções do sistema de equações.

Exercício 2

Verificou-se que a solução $x^* = (1.1, -2.1)^T$, não constitui solução do sistema dado, apenas satisfaz a segunda equação. Com o objectivo que este ponto fosse solução do sistema, alterou-se a primeira equação, ficando com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 2x_1^2x_2 + x_2^3 + 0.549 = 0 \\ 2x_1^4 + x_1x_2 - x_2^2 + 3.7918 = 0 \end{cases}$$

Partindo de $x_0 = (1, -2)^T$, correu-se o Método de Newton para este sistema. Verificou-se que este não convergia para x*, mas sim para outra solução :$(1.0231, -1.9875)^T$ (arredondado com 4 c.d.).

Voltou-se a correr o programa, mas agora com a aproximação inicial $x_0' = (2, -3)^T$, tendo-se obtido assim x*. É então com esta aproximação inicial e com o novo sistema de equações que se determinou a norma infinito do erro:

$$\|x^* - x_k\|_\infty = \max_{i \in \{1,2\}} |(x^* - x_k)_i| \quad , \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Em cada iteração do ciclo *for* do programa fornecido, juntaram-se instruções para calcular a norma da solução obtida em cada iteração, fazendo uso do comando *norm* disponibilizado pelo ***Matlab***. Trabalhou-se então com o seguinte programa:

```
function z = newton (funcao, z_0, z_exacta, iter)
syms x y;
jacobiana = jacobian (sym(funcao), [x, y]);
z = z_0;
for n = 1:iter
    disp (['iteracao: ', num2str(n)]);
    J = double (subs(jacobiana, {x,y},z));
    F = double (subs(funcao, {x,y},z));
    z = z - inv (J)*F
    erro = z_exacta-z
    norma = norm ((z_exacta-z), inf);
    disp (['norma infinito do erro: ', num2str(norma)]);
end
```

Correu-se o programa e obteve-se o seguinte output:

```
>> newton('[3*x^2-2*x^2*y+y^3+0.549;
2*x^4+x*y-y^2+3.7918]', [2; -3], [1.1; -2.1], 10)

iteracao: 1
z =
   1.634153616532721
  -2.809396326061998

erro =

  -0.534153616532721
   0.709396326061998
norma infinito do erro: 0.7094

iteracao: 2
z =
   1.394632615390800
  -2.517331454668876

erro =
  -0.294632615390800
   0.417331454668876
norma infinito do erro: 0.41733

iteracao: 3
z =
   1.248084002724780
  -2.314957227874899

erro =
  -0.148084002724780
   0.214957227874899
norma infinito do erro: 0.21496
```

```
iteracao: 4
z =
   1.164712063247112
  -2.194636128285441

erro =
  -0.064712063247112
   0.094636128285441
norma infinito do erro: 0.094636

iteracao: 5
z =
   1.121887106632945
  -2.132052422935730

erro =
  -0.021887106632945
   0.032052422935730
norma infinito do erro: 0.032052

iteracao: 6
z =
   1.104240821510824
  -2.106210799559165

erro =
  -0.004240821510824
   0.006210799559164
norma infinito do erro: 0.0062108

iteracao: 7
z =
   1.100224656621917
  -2.100328998935579

erro =
  1.0e-003 *
  -0.224656621916397
   0.328998935578806
norma infinito do erro: 0.000329

iteracao: 8
z =
   1.100000696049789
  -2.100001019314397

erro =
  1.0e-005 *
  -0.069604978869542
   0.101931439688840
norma infinito do erro: 1.0193e-
006

iteracao: 9
z =
   1.100000000006721
  -2.100000000009842

erro =
  1.0e-011 *
  -0.672062405726592
   0.984190506869709
norma infinito do erro: 9.8419e-
012

iteracao: 10
z =
   1.100000000000000
  -2.100000000000000

erro =
     0
     0
norma infinito do erro: 0

ans =
   1.100000000000000
  -2.100000000000000
```