Problema de Março – Matemática Numérica I

Domingos Lopes

6 de Abril de 2006

1. (a) Para calcular uma DVS de A, primeiro faz-se a DVP de A^TA (na forma $A^TA = V\Sigma^2V^T$). Para tal calcula-se os valores próprios de

$$A^TA = \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 & -72 \\ -72 & 146 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^TA - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (104-\lambda)(146-\lambda) - 5184 = 0 \Leftrightarrow 10000 - 250\lambda + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 125 \pm \sqrt{15625 - 10000} \Leftrightarrow \lambda = 50 \vee \lambda = 200.$$

Vamos determinar as colunas de V: v_1 e v_2 associadas, respectivamente, aos valores próprios 200 e 50:

$$(A^TA - 200I)v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -96 & -72 \\ -72 & -54 \end{bmatrix} v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v_1 = 0 \Leftrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$(A^TA - 50I)v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 54 & -72 \\ -72 & 96 \end{bmatrix} v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v_2 = 0 \Leftrightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Surge então que

$$A^TA = V\Sigma^2V^T = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

O que faz com que

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{200} & 0 \\ 0 & \sqrt{50} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}.$$

Temos (para a DVS) as relações $Av_1 = \sigma_1 u_1$ e$Av_2 = \sigma_2 u_2$, logo

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} Av_1 = \begin{bmatrix} \frac{6}{50\sqrt{2}} + \frac{44}{50\sqrt{2}} \\ \frac{30}{50\sqrt{2}} + \frac{20}{50\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

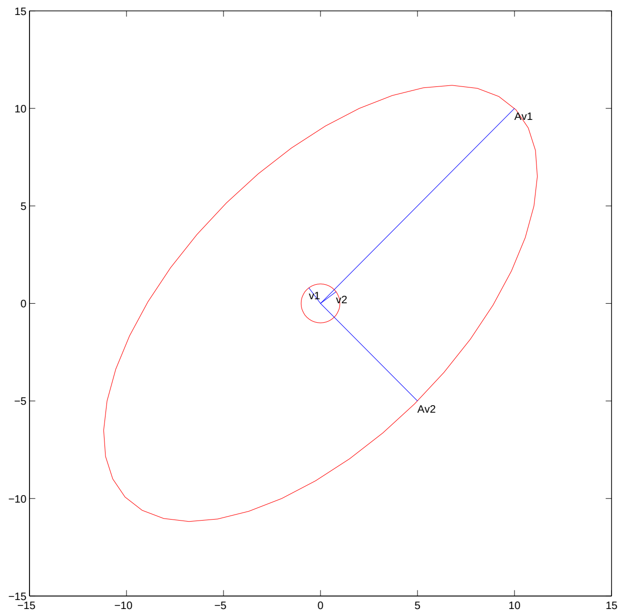
$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} Av_2 = \begin{bmatrix} -\frac{8}{25\sqrt{2}} + \frac{33}{25\sqrt{2}} \\ -\frac{40}{25\sqrt{2}} + \frac{15}{25\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

O que permite apontar uma DVS:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Para minimizar o número de valores negativos nas matrizes U e V, como os valores singulares são distintos, temos de alternar simultaneamente o sinal de u_i e v_i. Nota-se no entanto que, qualquer alteração feita não é vantajosa pelo que a DVS encontrada é a que se pretende.

(b) Os valores singulares de A são $10\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$. Os vectores singulares à esquerda são $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$. Os vectores singulares à direita são $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.



(c) 1 A norma 1 é o máximo da soma do valor absoluto dos elementos das colunas, que em A corresponde à segunda coluna, sendo então $\|A\|_1 = 16$.

∞ A norma ∞ é o máximo da soma do valor absoluto dos elementos das linhas, que em A corresponde à segunda linha, sendo então $\|A\|_\infty = 15$.

F A norma de Frobenius é a raíz quadrada da soma dos quadrados de todos os valores da matriz, ou seja, $\|A\|_F = \sqrt{(-2)^2 + 11^2 + (-10)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 121 + 100 + 25} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}$.

2 A norma 2 é o maior valor singular da matriz, ou seja, $\|A\|_2 = \sigma_1 = 10\sqrt{2}$.

(d) Como $A = U\Sigma V^T$ então $A^{-1} = (V^T)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$. Obtém-se então

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{11}{100} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{50} \end{bmatrix}.$$

(e) Temos consecutivamente $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (-2-\lambda)(5-\lambda) + 110 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 100 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{391}i}{2}$.

(f) Temos que $\det(A) = -2\text{x}5 + 10\text{x}11 = 100$, $\lambda_1\lambda_2 = \frac{(3+\sqrt{391}i)(3-\sqrt{391}i)}{4} = \frac{9+391}{4} = 100$ e $\sigma_1\sigma_2 = 10\sqrt{2}5\sqrt{2} = 100$, o que mostra que no caso de A se verifica. Para mostrar que as igualdades se verificam para qualquer matriz quadrada, fazemos $\det(A)^2 = \det(A^T)\det(A) = \det(A^TA) = \det(V\Sigma^2V^T) = \det(V)\det(V^T)\det(\Sigma^2) = \det(\Sigma)^2 = (\sigma_1\sigma_2)^2$, logo $|\det(A)| = \sigma_1\sigma_2$. Sendo A diagonalizável, então é da forma $A = SDS^{-1}$, o que faz com que $\det(A) = \det(S)\det(D)\det(S^{-1}) = \det(D) = \lambda_1\lambda_2$.

(g) A área do elipsóide pode ser deduzida a partir da transformação realizada no círculo unitário, que é no fundo o esticar e rodar. Como as rotações não alteram a área, então consideramos apenas aquilo que se estica: segundo um eixo por σ_1 e segundo o outro eixo por σ_2, logo estica-se ao todo $\sigma_1\sigma_2 = 100$, e assim área do elipsoide é 100π.

2. Queremos encontrar uma expressão do tipo $y = ax^2+bx+c$ que verifique $(x, y) = (1, 1), (2, 2), \ldots, (9, 6)$. À partida, sabemos já que tal expressão não existe, mas tentaremos encontrar uma que melhor se aproxime aos pontos pretendidos. Em termos de cálculo matricial, aparece

$$\begin{bmatrix} 1^2 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ 4^2 & 4 & 1 \\ 5^2 & 5 & 1 \\ 6^2 & 6 & 1 \\ 7^2 & 7 & 1 \\ 8^2 & 8 & 1 \\ 9^2 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 81 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Ad = e$$

Para resolver no sentido dos mínimos quadrados, trata-se de resolver o sistema $A^TAd = A^Te$. Considerando a factorização $A = QR$, trata-se de fazer $R^TQ^TQRd = R^TQ^Te \Leftrightarrow R^TRd = R^TQ^Te$. Como A tem característica completa, então R é invertível, sendo também $(R^T)^{-1} = (R^{-1})^T$, logo $(R^TR)^{-1} = R^{-1}(R^T)^{-1} = R^{-1}(R^{-1})^T$, logo a equação transforma-se em $d = R^{-1}(R^{-1})^TR^TQ^Te = R^{-1}Q^Te$.

No MATLAB surge:

```
A=[1^2 1 1;2^2 2 1;4^2 4 1;5^2 5 1;6^2 6 1;7^2 7 1;8^2 8 1;9^2 9 1];
b=[1;2;2;3;3;4;5;6];
[Q,R]=qr(A,0);
x=inv(R)*Q'*b;
fprintf('y=ax+bx+c\na = %14.11f\nb = %14.11f\nc = %14.11f\n',x(1),x(2),x(3));
hold off;
plot([1;2;4;5;6;7;8;9],b,'rx');
hold on;
text([1;2;4;5;6;7;8;9],b-0.2*ones(8,1),['(1,1)';'(2,2)';'(4,2)';'(5,3)';'(6,3)';'(7,
                                                                    4)';'(8,5)';'(9,6)']);
hold on;
plot(0:0.02:10,x(1)*(0:0.02:10)*diag(0:0.02:10)+x(2)*(0:0.02:10)+x(3)*ones(1,501));
```

Sendo então o resultado:

```
y=ax+bx+c
a =  0.05814373420
b = -0.00758396533
c =  1.28385698808
```