Departamento de Matemática da FCTUC

Licenciatura e Menor em Matemática

Matemática Numérica II

31 de Maio de 2011 Frequência **2h30m**

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Seja $R : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função continuamente diferenciável numa vizinhança de x_k. Denotemos por $J(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a matriz Jacobiana, em x, da função vectorial R. Prove que se a característica de $J(x_k)$ for igual a n então o passo de Gauss-Newton

$$p_k = -(J(x_k)^T J(x_k))^{-1} J(x_k)^T R(x_k)$$

é uma direcção de descida para a função $f(x) = R(x)^T R(x)/2$.

2. Considere o integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$, onde f é uma função contínua para $x \in [-1, 2]$.

Queremos aproximar este integral pela fórmula de quadratura dada por

$$Q(f) = c_{-1}f(-1) + c_0 f(0) + c_1 f(1) + c_2 f(2).$$

(a) Determine os valores de c_j, $j = -1, 0, 1, 2$ tais que a fórmula de quadratura $Q(f)$ tem grau de exactidão 3, ou seja, se f for um polinómio de grau 3, a fórmula $Q(f)$ dá-nos um valor exacto do integral.

(b) Verifique que para esses valores de c_j temos

$$Q(f) = \int_0^1 p_3(x)dx,$$

onde p_3 denota o polinómio interpolador de Lagrange de f de grau 3 no intervalo $[-1, 2]$ com interpolação nos pontos $-1, 0, 1, 2$.

(c) Mostre que para esses valores de c_j, e assumindo condições apropriadas para a função f, temos

$$\left|\int_0^1 f(x)dx - Q(f)\right| \le \frac{11}{720} M_4.$$

Estabeleça as condições de f para obter este majorante e defina a quantidade M_4.

3. Seja f uma função de período 2π e definamos $g(x) = f(mx)$, com m um número inteiro.

(a) Determine o período fundamental de g.

(b) Mostre como se relacionam os coeficientes de Fourier de g com os de f.

Coeficientes de Fourier de g : $\displaystyle\hat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\mathrm{e}^{-ikx}dx.$

4. Dada uma função f, contínua em $[0,1]$, considere o problema de condições de fronteira:

$$\text{determinar} \;\; u \in C^2[0,1]: \quad \begin{cases} -u''(x) + 3u(x) = f(x), & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Escreva a formulação variacional do problema da forma

$$\text{determinar} \quad u \in V: \quad a(u,v) = < f, v >, \quad \forall v \in V$$

(b) Considere o método de Galerkin

$$\text{determinar} \quad u_h \in V_h: \quad a(u_h, v_h) = < f, v_h >, \quad \forall v_h \in V_h$$

e seja $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ uma base de V_h. Prove que o método de Galerkin é equivalente a um sistema de N equações com N incógnitas.

(c) Escreva o sistema na forma

$$A_G \mathbf{u} = \mathbf{f}_G$$

e prove que a matriz A_G é definida positiva.

5. Considere o problema de valor inicial

$$y' = f(x, y(x)), \; x \in I, y(x_0) = y_0.$$

Considere ainda o método numérico para resolver o problema, dado por

$$u_{k+1} = u_k + \frac{h}{2}(f(x_{k+1}, u_{k+1}) + f(x_k, u_k)), \; 0 \leq k \leq N-1, \; u_0 = y_0, h = x_{k+1} - x_k.$$

(a) Determine o erro de truncatura do método numérico.

(b) Seja f uma função contínua à Lipschitz relativamente ao seu segundo argumento com constante $L > 0$ e suponhamos que $|y'''(x)| \leq M$, para uma constante positiva independente de x. Mostre que o erro global $e_k = y(x_k) - u_k$ satisfaz a desigualdade

$$|e_{k+1}| \leq |e_k| + \frac{h}{2} L(|e_{k+1}| + |e_k|) + \frac{1}{12} h^3 M$$

Nota: Considere o erro de truncatura dado por $T_k = -(1/12)h^2 y'''(\xi_k), \; \xi_k \in (x_k, x_{k+1})$

(c) Para um $h > 0$ tal que $hL < 2$, prove que

$$|e_k| \leq \frac{h^2 M}{12L} \left[\left(\frac{1 + \frac{1}{2}hL}{1 - \frac{1}{2}hL} \right)^k - 1 \right]$$