Departamento de Matemática da FCTUC
Ano 2010/2011
Licenciatura e Menor em Matemática
Data de entrega: Até 28 de Abril

Matemática Numérica II
Problema de Abril

Observação: Para a resolução dos problemas podem trabalhar em grupos de dois. Cada grupo submete apenas um trabalho com o nome completo dos dois na primeira página. No caso de a resolução do problema envolver o MATLAB todo o *input* e *output* relevante deve ser descrito. O programa deve ser incluído e deve ter o menor número possível de linhas. A organização e clareza das respostas também é avaliada.

1. (**MATLAB**) Calcule o número de subintervalos, m, para o qual exista a garantia de que o integral

$$I = \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)dx$$

é calculado com um erro inferior a 10^{-5} usando a:

(a) Fórmula dos trapézios composta, $I_{1,m}$.

(b) Fórmula de Simpson composta, $I_{2,m}$.

(c) Determine o valor das aproximações $I_{1,m}$ e $I_{2,m}$ para os valores de m que determinou nas alíneas anteriores.

2. Considere uma função $f \in L^2_w(a,b)$ e seja $\{\psi_0, \ldots, \psi_n\}$ uma base ortonormada de $\mathcal{P}_n$.

(a) Prove que para todo o $q \in \mathcal{P}_n$, existem constantes $\beta_0, \ldots, \beta_n$, tais que

$$||f-q||_2^2 = \sum_{j=0}^{n}[\beta_j - < f, \psi_j >]^2 + ||f||_2^2 - \sum_{j=0}^{n} | < f, \psi_j > |^2.$$

(b) Conclua, pela alínea anterior, que dado $f \in L^2_w(a,b)$, existe um único polinómio $q^* \in \mathcal{P}_n$ tal que

$$||f-q^*||_2 = \min_{q \in \mathcal{P}_n} ||f-q||_2.$$

(b) Prove, ainda usando as alíneas anteriores, a **desigualdade de Bessel**:

Se $f \in L^2_w(a,b)$, então

$$\sum_{j=0}^{n} | < f, \psi_j > |^2 \leq ||f||_2^2.$$

Nota: Relembramos que a definição de produto interno é $\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx$ e $||\cdot||_2$ denota a norma induzida por este produto interno, isto é, $||g||_2 = < g, g >^{1/2}$.