Departamento de Matemática da FCTUC
Ano 2010/2011
Licenciatura e Menor em Matemática
Data de entrega: Até 24 de Maio

Matemática Numérica II
Problema de Maio

Não se esqueça de que a organização e clareza das respostas também é avaliada.

1. Consideremos os dados $u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}$ e $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$. A transformada de Fourier discreta é dada por
$$\tilde{v}_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kjh} v_j, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad h = \frac{2\pi}{N}.$$
Prove que
$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{u}_k \overline{\tilde{v}_k} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} u_j \overline{v_j}.$$

2. Considere o problema de condições de fronteira
$$-u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \qquad x \in [a, b], \qquad u(a) = u(b) = 0,$$
e assuma que a solução verifica $u \in C^4[a, b]$.

(a) Prove que, para todo o $x \in [a + h, b - h]$, temos
$$\left| u''(x) - \frac{1}{h^2}[u(x + h) - 2u(x) + u(x - h)] \right| \leq \frac{h^2}{12}||u^{(4)}||_\infty.$$

(b) Considerando a aproximação da alínea (a), prove que o erro da aproximação das diferenças finitas verifica
$$|u(x_j) - u_j| \leq \frac{h^2}{12}||u^{(4)}||_\infty ||A^{-1}e||_\infty, \qquad j = 1, \ldots, N-1,$$
onde A é a matriz do método das diferenças finitas e $e = [1, \ldots, 1]^T$.

(c) Prove, ainda, que o erro verifica
$$|u(x_j) - u_j| \leq \frac{h^2}{96}||u^{(4)}||_\infty (b - a)^2, \qquad j = 1, \ldots, N-1.$$

(d) Escreva a forma matricial da aproximação considerada.

(e) Escreva a forma matricial da aproximação considerada assumindo agora
$$u(a) = \alpha, \qquad u(b) = \beta$$
com α, β constantes não nulas.

(f) A majoração do erro obtida na alínea (b) é ainda válida no caso das condições de fronteira serem não-nulas?