Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Métodos Numéricos para Equações com Derivadas Parciais (2007/2008)

Data de recepção: **05/03/2008** **Ficha 1** Data de entrega: **12/03/2008**

1. (a) Sejam $a, b \in IR$. Mostre que, para todo o $\epsilon > 0$,
$$ab \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2,$$
e
$$a + b \leq \left[(1+\epsilon)a^2 + \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)b^2\right]^{1/2}.$$
   (b) Mostre que a forma bilinear $a : V \times V \longrightarrow IR$, com $V = H_0^1([0,1])$,
$$a(u,v) = \int_0^1 (pu'v' + qu'v + ruv)dx,$$
com $\underline{p} = \inf_{x\in[0,1]} p(x) > 0$, q não nula e $\underline{r} = \inf_{x\in[0,1]} |r(x)|$ é limitada e, se
$$\|q\|_\infty^2 < 4\underline{p}\underline{r}$$
é também elíptica.

2. Seja u a solução do problema
$$\begin{cases} -\Delta u + 3u = \sin(xy), \quad (x,y) \in \Omega =]0,1[\times]0,1[, \\ u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases}$$
em que $\partial\Omega$ denota a fronteira de Ω. Obtenha a formulação fraca do problema num enquadramento funcional adequado e averigúe da existência e unicidade da sua solução.

3. Considere o problema de Dirichlet não homogéneo
$$\begin{cases} -\nabla^T(a(x)\nabla u(x)) + b(x)^T\nabla u(x) + d(x)u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), \qquad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$
com Ω um conjunto aberto e limitado de IR^2, $a : \Omega \to IR^{2,2}$, $b : \Omega \to IR^2$, $d : \Omega \to IR$ funções conínuas em Ω, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$. Seja $w \in H^1(\Omega)$ tal que $w(x) = g(x)$ para $x \in \partial\Omega$ e $\widetilde{u}(x) = u(x) - w(x)$.
   (a) Deduza a equação diferencial para $\widetilde{u}$.
   (b) Deduza a formulação fraca da equação diferencial obtida na alínea anterior.

4. Prove o Lema de Gronwall: Seja $\{v_i\}_{i=0}^N$ uma sucessão de números positivos tais que $v_{i+1} \leq Cv_i + D$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, com C e D constantes e $C > 0$. Então, para todo o $i = 0, \ldots, N$,
$$v_i \leq \frac{D}{1-C}(1 - C^i) + v_0 C^i, \quad C \neq 1, \qquad \text{e} \qquad v_i \leq iD + v_0, \quad C = 1.$$

5. Seja u uma função suficientemente regular, definida em $[a,b]$, e $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, ..., N$, com $h = \frac{b-a}{N}$, $N \geq 2$, uma partição regular do intervalo. Mostre que:
   (a) $D_x^+ u(x_i) := \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} = u'(x_i) + \frac{h}{2}u''(\xi_i), \quad \xi_i \in]x_i, x_{i+1}[, \quad i = 0, ..., N-1;$
   (b) $D_x^- u(x_i) := \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h} = u'(x_i) - \frac{h}{2}u''(\xi_i), \quad \xi_i \in]x_{i-1}, x_i[, \quad i = 1, ..., N;$
   (c) $D_{2x} u(x_i) := D_x^+ D_x^- u(x_i) := \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} = u''(x_i) + \frac{h^2}{12}u^{(iv)}(\xi_i), \quad \xi_i \in]x_{i-1}, x_{i+1}[,$ $i = 1, ..., N-1$.