Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Métodos Numéricos para Equações com Derivadas Parciais (2007/2008)

Data de recepção: **26/03/2008** **Ficha 2** Data de entrega: **09/04/2008**

1. Considere o problema
$$\begin{cases} -u'' = f, & \Omega =]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$
   (a) Usando diferenças centradas de segunda ordem numa malha uniforme, obtenha um esquema de diferenças finitas para o problema dado e represente-o na forma
   $$AU = F.$$
   (b) Considerando a malha uniforme da alínea anterior, obtenha um esquema de elementos finitos para o problema dado.

   (c) Moste que a solução obtida alínea anterior é equivalente à obtida por um método de diferenças finitas apropriado.

   (d) Mostre que a matriz A obtida na alínea (a) é simétrica, positiva definida e que $\|A^{-1}\|$ é limitada.

2. Considere o problema de condições de fronteira $\begin{cases} -u'' + cu' = 0, & x \in]0,1[, \quad c \in \mathbb{R}, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \end{cases}$

   (a) Determine o sistema algébrico que lhe permite obter a solução aproximada do problema usando diferenças centradas de segunda ordem numa malha uniforme de espaçamento $h = 1/N$, $N \geq 2$.

   (b) Mostre que a solução exacta do sistema algébrico obtido é
   $$U_i = \frac{1 - r^i}{1 - r^{n+1}}, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$
   onde
   $$r = \frac{1+p}{1-p}, \quad \text{com} \quad p = \frac{ch}{2}.$$
   (c) Que condições deverá impôr a h por forma a evitar oscilações na solução aproximada.

3. Considere o problema de Poisson num quadrado unitário. Deduza um esquema compacto de diferenças finitas com 9 pontos de ordem 4 para aproximar a solução do problema.

4. O problema da determinação da distribuição da temperatura num domínio Ω é dado, no caso estacionário, pela equação de Laplace
$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad x \in \Omega.$$
Considere Ω um quadrado de lado de medida 12 cm dotado de um orifício quadrado (centrado) de lado 6 cm. As condições de fronteira são: a temperatura interior é de -1 grau e a temperatura exterior é $+1$ grau. Determine a temperatura entre as duas fronteiras usando o método dos elementos finitos numa rede uniforme de espaçamento 1 cm.